И.И.БАВРИН

НАЧАЛА АНАЛИЗА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ И ЭКОНОМИКЕ

И.И.БАВРИН

НАЧАЛА АНАЛИЗА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ И ЭКОНОМИКЕ

Книга для учащихся 10–11 классов

2-е издание

Москва "Просвещение" 2000

УДК 373.167.1:517
ББК 22.161
Б13

Рецензенты:
доктор педагогических наук *М. В. Ткачева,*
заслуженный учитель школы РФ *Н. В. Гришкова*

Баврин И. И.
Б13 Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике: Кн. для учащихся 10—11 кл.— 2-е изд.— М.: Просвещение, 2000.— 80 с.: ил.— ISBN 5-09-009905-7.
Книга посвящена построению математических моделей в естествознании (физике, биологии, химии) и экономике. Изложение опирается на материал курса алгебры и начал анализа.

УДК 373.167.1:517
ББК 22.161

ISBN 5-09-009905-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

ДОРОГИЕ РЕБЯТА!

Перед вами книга «Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике». Эта книга может служить вам в качестве дополнения к любому из действующих школьных учебников «Алгебра и начала анализа».

Вы уже знакомы с понятиями функции, производной, интеграла и другими понятиями начал анализа. Вам уже известны и некоторые практические приложения начал анализа (геометрический и физический смысл производной, задачи на экстремум, нахождение площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла и др.). Однако приложения начал анализа весьма многообразнее и охватывают как естественные, так и другие науки, что не позволяют осветить размеры школьного учебника. Это призвана в какой-то мере осуществить настоящая книга.

Она задумана как рассказ о практическом применении в школьных дисциплинах — геометрии, физике, химии, биологии и экономике — изучаемых в школе начал анализа.

Хотя, как вы знаете, математика является одной из самых древних наук, но роль ее в различных областях естествознания и в разное время была неодинаковой. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его основные черты и свойства на языке математических понятий и соотношений, или, как теперь принято говорить, возможность построить математическую модель изучаемого объекта.

Приведем простейший пример математической модели. Представим себе, что требуется определить площадь пола комнаты. Для выполнения такого задания измеряют длину и ширину комнаты, а затем перемножают полученные числа. Эта элементарная процедура фактически означает следующее. Реальный объект — пол комнаты — заменяется абстрактной математической моделью — прямоугольником. Прямоугольнику приписываются размеры, полученные в результате измерения, и площадь такого прямоугольника приближенно принимается за искомую площадь.

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность математически сформулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет единообразно описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. прогнозировать результаты будущих наблюдений.

Математические модели давно и успешно применяются в физике. Они теперь широко используются и в химии, и в биологии, и в экономике.

Предлагаемая вам, ребята, книга содержит некоторые из этих применений. Рассмотренные здесь математические модели в физике, химии, биологии, экономике помогут вам увидеть силу межпредметных связей, важную роль математики, дающей мощный аппарат для решения многих задач, которые выдвигаются и успешно решаются в различных областях науки и практики.

Книга состоит из двух разделов.

Первый раздел «Функция, производная и интеграл в естествознании и экономике» посвящен использованию понятий начал анализа в задачах естествознания и экономики. Сюда, в частности, относятся закон непрерывного (органического) роста, задачи естественного и экономического содержаний, как приводящие к понятиям производной и определенного интеграла, так и использующие эти понятия (задачи о силе электрического тока, скорости химической реакции, скорости роста популяции, производительности труда, вычислении сопротивления цепи, численности популяции, реакции организма на введенное лекарство, биомассе популяции, средней длине пролета и др.). Здесь же показано, как с помощью определенного интеграла можно находить длину дуги, объемы таких тел, как пирамида, прямой круговой цилиндр, прямой круговой конус, прямой круговой усеченный конус, шар и его части, а также как рассчитывать центр тяжести материальной дуги и материальной плоской фигуры, вычислять скорость ракеты.

Второй раздел «Дифференциальные уравнения в естествознании и экономике» содержит математические модели в физике (радиоактивный распад, охлаждение тел, движение моторной лодки, потеря заряда проводником, заряд конденсатора, падение с парашютом, равномерно ускоренное движение, гармонический осциллятор), химии (закон перехода вещества в раствор, концентрация раствора, химические реакции), биологии (увеличение количества фермента, изолированная колония организмов, скорость размножения бактерий, динамика численности популяции, модель сезонного роста, внутривенное питание глюкозой, теория эпидемий, рост листьев растения), экономике (непрерывный рост населения или его убывание, регулируемый его рост, количество населения на определенную дату, динамика роста населения по времени, истощение ресурсов, текучесть рабочей силы, эффективность рекламы).

Функция, производная и интеграл в естествознании и экономике

ФУНКЦИИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ И ЭКОНОМИКЕ

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Понятие функции и различные способы ее задания, среди которых наиболее употребительны аналитический, табличный и графический, давно уже используются в естествознании и экономике. Известно, что путь s, пройденный телом с постоянной скоростью v, есть функция времени t:

$$s = vt;$$

площадь S круга есть функция его радиуса R:

$$S = \pi R^2.$$

Многие биологические явления (слух, зрение и т. д.) связаны с колебательными процессами, описание которых достигается с помощью тригонометрических функций

$$y = \sin x, \quad y = \cos x.$$

В различного рода экспериментах и наблюдениях широко используется табличный способ задания функции. Много таблиц используют и работники бухгалтерий, сбербанков и т. д.

Графический способ задания функции применяется при работе различных самопишущих приборов. В медицине, например, работа сердца анализируется с помощью кардиографа.

ЗАКОН НЕПРЕРЫВНОГО (ОРГАНИЧЕСКОГО) РОСТА

Число e находит применение при выводе закона, которому подчиняются многие естественные процессы, как-то: распад радиоактивного вещества, размножение бактерий, рост народонаселения, рост денежных вкладов и др. Разберем типичный в этом отношении пример начисления сбербанком процентов по вкладу.

Рост денежных вкладов. Сбербанк выплачивает 10% годовых от суммы вклада. Если 1 января положить в сбербанк 100 000 р., то в конце года на них будет начислено 10 000 р. процентов. Если же 1 июля взять весь вклад обратно, то будет начислено не 10 000 р., а половина этой суммы, т. е. 5000 р. Если изъять вклад 1 апреля, то будет начислено 10 000 р.$\cdot\frac{1}{4}$, т. е. 2500 р.

Поэтому, вместо того чтобы вложить 1 января 100 000 р. и истребовать их в конце года, выгоднее 1 июля изъять весь вклад и вложить его снова.

В первом случае в конце года будет получено 110 000 р., во втором случае 1 июля будет получено 105 000 р.; на вторую половину года будет вложено 105 000 р., на которые будет начислено 5%, т. е. 5250 р., и в конце года будет получено 110 250 р.

Еще выгоднее изымать и снова вносить вклад каждый месяц, каждую неделю и т. д. В математической схеме можно представить этот процесс изъятия и внесений вклада бесконечным.

Пусть a — начальная сумма вклада и $p\%$ — годовой процент. Если ввести условие присоединения процентов по отдельным частям года, равным $\frac{1}{n}$-й доле его, причем процентная такса $p\%$ по-прежнему относится к целому году, то по истечении одной такой части года начальная сумма обратится в

$$a+a\frac{p}{100n}=a\left(1+\frac{p}{100n}\right)=a_1,$$

по прошествии двух частей — в

$$a_1+a_1\frac{p}{100n}=a_1\left(1+\frac{p}{100n}\right)=a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^2=a_2,$$

по прошествии трех частей — в

$$a_2+a_2\frac{p}{100n}=a_2\left(1+\frac{p}{100n}\right)=a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^3 \text{ и т. д.}$$

По истечении одного года начальная сумма a обратится в $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^n$, по истечении двух лет — в $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{2n}$, по истечении t лет — в $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$.

Если ввести дальнейшее условие, что присоединение процентов производится непрерывно, т. е. число частей, на которые делится год, неограниченно возрастает ($n\to\infty$), то величина наращенной суммы A представится в виде предела выражения

$$a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} \text{ при } n\to\infty,$$

т. е.

$$A=\lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Для отыскания этого предела обозначим $\frac{p}{100n}=\frac{1}{m}$; тогда $n=\frac{pm}{100}$ и $nt=\frac{pmt}{100}$. Здесь $m=\frac{100n}{p}$, откуда следует, что при неограниченном возрастании n неограниченно растет и m.

После перехода к переменной m величина наращенной суммы по прошествии t лет определится формулой

$$A=a\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{mpt}{100}}$$

или

$$A=a\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{pt}{100}}.$$

Учитывая, что выражение в больших скобках представляет собой постоянную величину e, находим

$$A=ae^{\frac{pt}{100}}. \qquad (1)$$

Приведем величину вклада при данном проценте p через t лет при однократном изъятии в конце срока:

$$A_1=a\left(1+\frac{pt}{100}\right).$$

Значение A всегда больше A_1.

Сравним значения A и A_1 при начальном вкладе $a=1\,000\,000$ р., времени $t=10$ лет и процентной ставке $p=10$. Вычисления дают результат:

$$A=1\,000\,000e^{0,1\cdot 10}=1\,000\,000\cdot e\approx 2\,718\,281,$$
$$A_1=1\,000\,000\cdot(1+0,1\cdot 10)=2\,000\,000.$$

Как видим, разница (в рублях) существенная.

Замечание. Формула (1) применяется каждый раз, когда речь идет о непрерывном органическом росте или убывании с течением времени.

Заменяя $\frac{p}{100}$ величиной k и вводя обозначение $-k$ для случая убывания, получим формулы: $A=ae^{kt}$ — для вычисления результатов процесса непрерывного роста и $A=ae^{-kt}$ — для непрерывного убывания.

НЕПРЕРЫВНЫЕ И РАЗРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ И ЭКОНОМИКЕ

Заметим прежде всего, что слух, зрение, восприятие ультразвука, используемые многими биологическими видами,— все эти явления связаны с колебательными процессами, описание которых достигается с помощью тригонометрических функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$.

Вместе с тем в конкретном эксперименте такие величины, как путь, биомасса популяции, численность популяции (число особей в популяции), температура, время и т. п., не могут принимать значения, равные любому действительному числу. Так, путь может быть в зависимости от ситуации измерен целым числом километров или миллиметров; биомасса измеряется тоннами или десятками миллиграммов; время — годами или сотыми долями секунды. И, формально говоря, область значений и область определения упомянутых функций не являются промежутками, а представляют собой некоторые шкалы, может быть, с очень мелкими, но стандартными делениями. Величина этих делений определяется характером эксперимента и точностью приборов. Так, возраст крупных животных мы измеряем годами, а время жизни некоторых элементарных частиц — миллиардными долями секунды. Но дело не в величине делений, а в том, что мы можем сказать: «В этом эксперименте частица прожила 3,1 или 3,2 секунды», но не можем заявить, что она прожила π секунд.

Понятно, что, имея дело с такими функциями, невозможно говорить о непрерывности. Чтобы иметь возможность пользоваться аппаратом начал анализа там, где это удобно, функции, заданные на шкале, заменяются их непрерывными аналогами. Однако это не всегда удобно и целесообразно. Например, если область определения функции состоит всего из двух элементов, вряд ли стоит ее заменять промежутком. Но если области определения и значений функции состоят хотя и из конечного, но достаточно большого количества элементов, в каком-то смысле «близко расположенных друг к другу» (как мелкие деления на шкале), то мы вправе заменить их сплошными промежутками и функцию, определенную на одном из них со значениями в другом, считать непрерывной. Изучив эту модельную функцию, мы затем сумеем сделать выводы относительно функции, фигурирующей в эксперименте.

Эта идея лежит в основе построения математических моделей с использованием непрерывных функций. Именно такие математические модели и приводятся в дальнейшем. Поэтому рассматриваемые в них функции будем считать непрерывными и дифференцируемыми (дифференцируемость также необходима для использования аппарата начал анализа), уже специально не оговаривая это. То же самое следует иметь в виду и при рассмотрении функций, описывающих экономические величины: численность населения, денежный вклад в сбербанк, число единиц реализованной продукции и т. п.

Приведем примеры разрывных функций.

Пример 1. Скорость тела, падающего на землю, вообще является непрерывной функцией времени, но для момента удара можно условно считать, что она мгновенно (скачком) падает до нуля, т. е. терпит разрыв.

Пример 2. Рассмотрим клетку, способную возбуждаться от внешних воздействий, например нервные клетки, клетки мышц и т. п. Если величину возбуждения E измерить в тех или иных единицах, то график возбуждения $E=E(t)$ имеет вид, изображенный на рисунке 1.

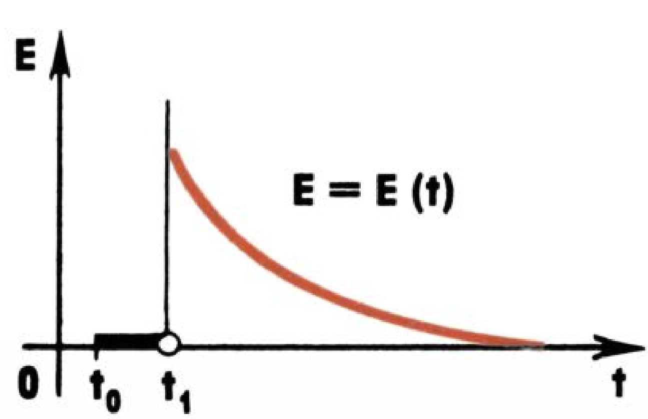

Рис. 1

В момент t_0 клетка получает сигнал. Однако возбуждение про-

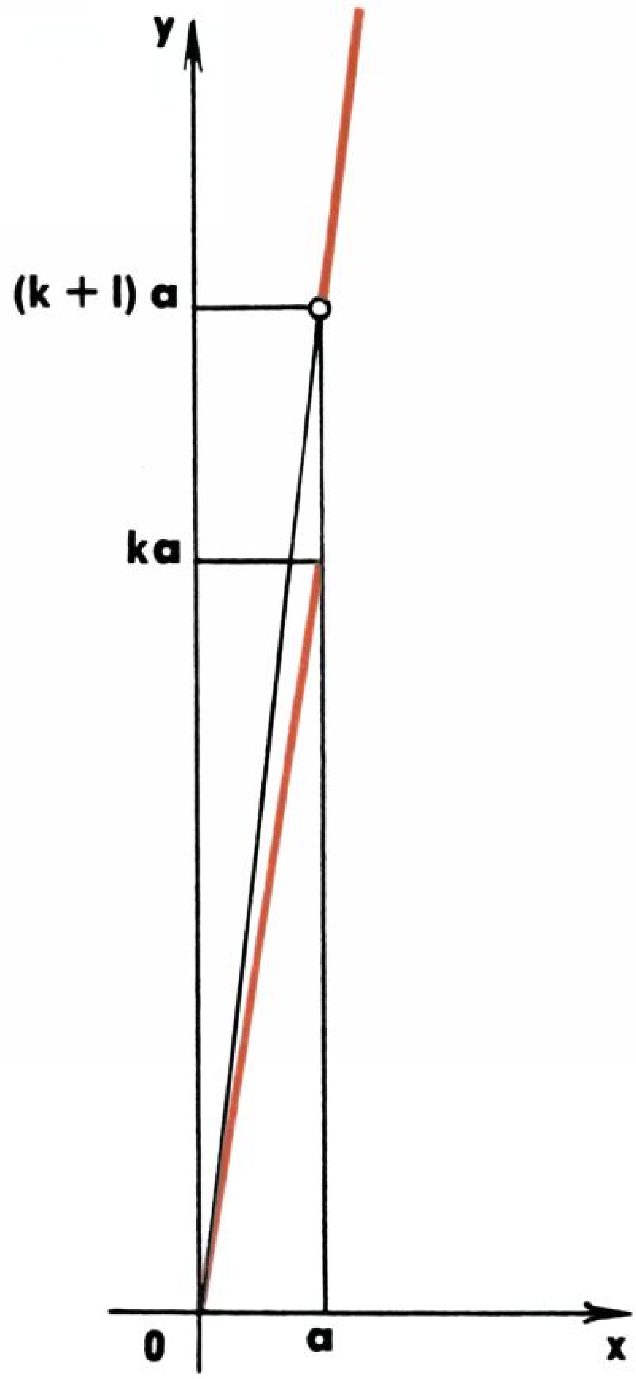

Рис. 2

исходит в некоторый момент $t_1 > t_0$. Отрезок $[t_0;\ t_1]$ называется *латентным периодом*. В момент t_1 клетка мгновенно возбуждается до максимальной величины, а затем возбуждение постепенно уменьшается до тех пор, пока не будет нового сигнала. Если сигнала нет достаточно долго, то возбуждение становится равным нулю.

Пример 3. В области экономики одинаково часто встречаются как непрерывные, так и разрывные функции. Пусть x — количество израсходованной предприятием электроэнергии в кВт·ч, а y — ее стоимость в рублях. Известно, что $y = kx$, где k — тариф, т. е. стоимость 1 кВт·ч. Эта функция непрерывна. Изменим условия этого примера. В целях стимулирования экономии электроэнергии введено два разных тарифа: если расход энергии не превышает a кВт·ч, то тариф прежний и равен k; если же расход превышает a кВт·ч, то тариф увеличивается на l, т. е. становится равным $k + l$. Таким образом,

$$y = \begin{cases} kx, \text{ если } 0 < x \leqslant a, \\ (k+l)\,x, \text{ если } x > a. \end{cases}$$

График этой функции имеет вид, изображенный на рисунке 2.

ПРОИЗВОДНАЯ В ЗАДАЧАХ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ЭКОНОМИКИ

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Задача о скорости движущейся точки. Пусть $s = s(t)$ представляет закон прямолинейного движения материальной точки. Это уравнение выражает путь s, пройденный точкой, как функцию времени t. Обозначим через Δs путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt от момента t до $t + \Delta t$, т. е.

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* точки за время от t до $t+\Delta t$. Чем меньше Δt, т. е. чем короче промежуток времени от t до $t+\Delta t$, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t. Поэтому естественно ввести понятие скорости v в данный момент t, определив ее как предел средней скорости за промежуток от t до $t+\Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$v=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Величина v называется *мгновенной скоростью* точки в данный момент t.

Задача о силе электрического тока. Пусть $q=q(t)$ — количество электричества (в кулонах), протекающее через поперечное сечение проводника за время t; количество электричества есть функция времени, так как каждому значению времени t соответствует определенное значение количества электричества. Для определения скорости изменения количества электричества с течением времени пользуются понятием силы тока. Обозначим через Δq количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени Δt от момента t до момента $t+\Delta t$. Отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *средней силой тока* за время от t до $t+\Delta t$ и обозначается через $I_{\text{ср.}}$. В случае постоянного тока $I_{\text{ср.}}$ будет постоянной. Если в цепи переменный ток, то $I_{\text{ср.}}$ будет различна для различных промежутков времени. Поэтому для цепи переменного тока вводят понятие силы тока I в данный момент t, определив ее как предел средней силы тока за промежуток времени от t до $t+\Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$I=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Аналогично задаче о скорости прямолинейного движения рассматриваются задачи о скоростях химической реакции и роста популяции, о касательной, о производительности труда.

Задача о скорости химической реакции. Пусть дана функция $m=m(t)$, где m — количество некоторого вещества, вступившего в химическую реакцию к моменту времени t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δm величины m. Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ — средняя скорость химической реакции за промежуток времени Δt. Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}$, есть скорость химической реакции в данный момент времени t.

Задача о скорости роста популяции. Пусть $p=p(t)$ — размер популяции бактерий в момент t. Тогда, рассуждая, как и выше, получим, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t}$ есть скорость роста популяции бактерий в данный момент t.

Задача о касательной к данной кривой. Пусть на плоскости xOy задана кривая уравнением $y=f(x)$. Требуется провести касательную к данной кривой в данной точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$. Так как точка касания M_0 дана, то для решения задачи потребуется найти угловой коэффициент искомой касательной, т. е. $\operatorname{tg}\varphi$ — тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox (рис. 3).

Через точки $M_0(x_0;\ f(x_0))$ и $M'(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$ проведем секущую M_0M'. Из рисунка 3 видно, что угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ секущей M_0M' равен отношению

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

где $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Угловой коэффициент касательной M_0T к данной кривой в точке M_0 может быть найден на основании следующего определения: *касательной к кривой в точке* M_0 называется прямая M_0T, угловой коэффициент которой равен пределу углового коэффициента секущей M_0M', когда $\Delta x\to 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

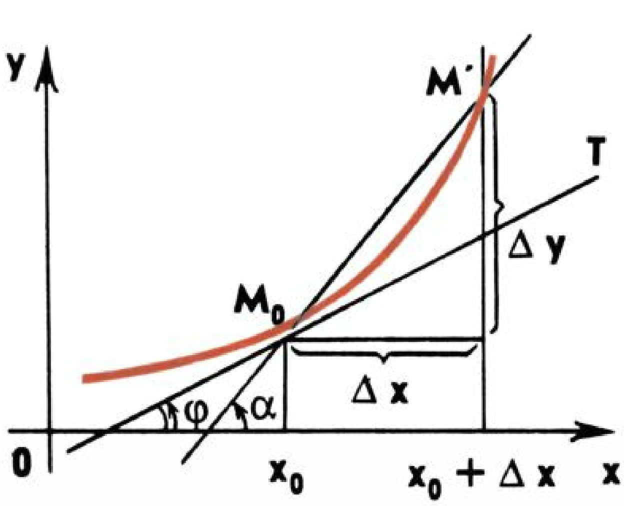

Рис. 3

Задача о производительности труда. Пусть к моменту времени t (часов) рабочий произвел $F=F(t)$ единиц продукции (выработка составила $F(t)$ единиц). Приращение выпуска продукции ΔF за время Δt равно числу единиц продукции, выпущенной за время Δt, т. е.

$$\Delta F=F(t+\Delta t)-F(t).$$

Отношение $\frac{\Delta F}{\Delta t}$ называется *средней производительностью труда* рабочего за время от t до $t+\Delta t$. Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta t}$, называется *производительностью труда* рабочего в момент времени t.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Математическая операция, требуемая для решения рассмотренных выше задач, одна и та же. Выясним аналитическую сущность этой операции, отвлекаясь от вызвавших ее конкретных вопросов.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(a;\ b)$. Возьмем какое-нибудь значение x из $(a;\ b)$. Затем возьмем новое значение аргумента $x+\Delta x$ из этого промежутка, придав первоначальному значению x приращение Δx (положительное или отрицательное). Этому новому значению аргумента соответствует и новое значение функции $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$, где

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Теперь составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Оно является функцией от Δx.

Если существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, то этот предел называется *производной функции $y=f(x)$ в данной точке x* и обозначается через y' или $f'(x)$:

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Действие нахождения производной функции называется ее *дифференцированием*, а функция, имеющая производную в точке x,— *дифференцируемой* в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала, называется дифференцируемой на этом интервале.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема в интервале $(a; b)$, то в интервале $(a; b)$ найдется такая точка c, что справедлива формула $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, называемая *формулой Лагранжа*.

Пример 1. Найти производную функции $y=C$, где C — постоянная. Имеем:

$$y+\Delta y=C,\ \Delta y=0,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,$$

т. е. $y'=0$. Следовательно, производная постоянной равна нулю.

Пример 2. Найти производную функции $y=x$. Имеем:

$$y+\Delta y=x+\Delta x,\ \Delta y=\Delta x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=1,\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,$$

т. е. $y'=1$.

Правила дифференцирования и формулы для производных основных элементарных функций можно найти в учебниках.

Из рассмотренных выше задач, приводящих к понятию производной, следует несколько выводов.

Скорость прямолинейного движения есть производная пути $s=s(t)$ по времени t, т. е. $v=s'$. В этом состоит *механический смысл производной.*

Скорость химической реакции есть производная количества вещества $m=m(t)$ по времени t, т. е. $v=m'$.

Скорость роста популяции есть производная размера популяции $p=p(t)$ по времени t, т. е. $v=p'$.

Точно так же скорость роста численности населения есть производная от количества населения $A=A(t)$ по времени t, т. е. $v=A'$.

Сила переменного тока I есть производная количества электричества $q=q(t)$ по времени t, т. е. $I=q'$.

Угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x есть производная $f'(x)$. В этом состоит *геометрический смысл производной.*

Производительность труда $f(t)$ есть производная от выработки продукции $F(t)$ по времени t, т. е.

$$f(t)=F'(t). \tag{1}$$

Пример 3. Точка движется по прямой по закону $s=t^2$, где s — путь (в см), а t — время (в с). Найти скорость движения точки в момент $t=3$.

Имеем $v=s'=2t$. В частности, при $t=3$ $v=6$ см/с.

Пример 4. Если популяция в момент t насчитывает $p(t)=3000+100\ t^2$ особей (при этом t измеряется в часах), то скорость роста популяции есть $p'=200\ t$.

Скорость роста этой популяции увеличивается со временем. Если $t=5$, то скорость роста составляет 1000 особей в час. Если $t=10$, то скорость роста составляет 2000 особей в час.

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть переменная y зависит от переменной u, которая, в свою очередь, зависит от переменной x, т. е. $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, а потому будет меняться и y. Значит, y является функцией x:

$$y=f(\varphi(x)).$$

Эта функция называется *сложной функцией* (или функцией от функции), переменная u — промежуточной переменной.

Предположим, что функция $f(u)$ имеет производную по u, а $\varphi(x)$ — производную по x. Требуется найти производную y по x. Имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(предполагается, что Δu при достаточно малых значениях Δx не обращается в нуль), откуда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

и, значит,

$$(f(\varphi(x)))'=f'(u)\cdot u'$$

или

$$(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x). \tag{2}$$

Пример 1. Если $y=\sin u$, а $u=x^2$, то $y=\sin x^2$ есть сложная функция независимой переменной x.

Пример 2. $(\sin x^2)'=(x^2)'\cos x^2=2x\cos x^2$.

Пример 3. $(\cos 3x)'=-(3x)'\sin 3x=-3\sin 3x$ (роль промежуточной переменной u здесь играет $3x$).

Пример 4. Пусть $u=u(x)$ — дифференцируемая функция. Найти производные сложных функций:

а) $y=-\frac{2}{\sqrt{u}}$; б) $y=\ln u$; в) $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}+u}{\sqrt{\frac{a}{b}}-u}$.

Решение. а) $y'=-2\left(-\frac{1}{2}\right)u^{-\frac{3}{2}}u'=\frac{u'}{u\sqrt{u}}$;

б) $y'=\frac{u'}{u}$;

в) $y'=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\ln\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+u\right)-\ln\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-u\right)\right)'=$

$$=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left(\frac{u'}{\sqrt{\frac{a}{b}}+u}+\frac{u'}{\sqrt{\frac{a}{b}}-u}\right)=\frac{u'}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{2\sqrt{\frac{a}{b}}}{\frac{a}{b}-u^2}=\frac{1}{b}\cdot\frac{u'}{\frac{a}{b}-u^2}=\frac{u'}{a-bu^2}.$$

Примечание. При решении примеров 2 и 3 наряду с формулой (2) использованы формулы

$$(\sin x)'=\cos x \text{ и } (\cos x)'=-\sin x,$$

а при решении примера 4 наряду с формулой (2) — формулы

$$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1} \text{ и } (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Пусть $s=s(t)$ — уравнение прямолинейного движения материальной точки. Как установлено ранее, мгновенная скорость этого движения v есть производная пути s по времени t, т. е. $v=s'$. Если теперь эту скорость рассматривать как функцию времени, то так же, как и выше, установим, что v' есть ускорение a в момент t. Производная от s' по времени t называется *производной второго порядка* или *второй производной* функции s по времени t и обозначается s''. Таким образом, получаем, что $a=s''$, т. е. вторая производная пути s по времени t есть ускорение a движущейся точки в момент t. В этом и заключается *механический смысл второй производной.*

Пример. Точка движется по прямой по закону $s=t^3$, где s — путь (в см), а t — время (в с). Найти скорость и ускорение движения точки в момент $t=2$.

Решение. Имеем $v=s'=3t^2$, $a=s''=6t$. В частности, при $t=2$

$$v=12 \text{ см/с и } a=12 \text{ см/с}^2.$$

Задача 1. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи максимально, если при последовательном соединении этих сопротивлений оно равно R?

Решение. Пусть r — сопротивление электрической цепи, состоящей из двух параллельно соединенных сопротивлений x и y. Тогда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{r}. \qquad (3)$$

С другой стороны, из условия задачи имеем:

$$x+y=R. \qquad (4)$$

Из равенств (3) и (4) находим

$$r=\frac{x(R-x)}{R}\equiv r(x).$$

Очевидно, $0<x<R$. Производная $r'=\frac{R-2x}{R}$ обращается в нуль в единственной точке $x=\frac{R}{2}$. Это значение и доставляет r максимальное значение, так как при любом достаточно малом положительном числе h

$$r'\left(\frac{R}{2}-h\right)=\frac{2h}{R}>0 \text{ и } r'\left(\frac{R}{2}+h\right)=-\frac{2h}{R}<0^*,$$

т. е. при переходе через точку $x=\frac{R}{2}$ в направлении возрастания x производная r' меняет знак с плюса на минус.

Задача 2. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону:

$$p(t)=1000+\frac{1000t}{100+t^2},$$

где t выражается в часах. Найти максимальный размер этой популяции.

Решение. Имеем

$$p'(t)=\frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}.$$

Так как $p'(10)=0$ и $p'(10-h)=\frac{1000(20-h)h}{(100+(10-h)^2)^2}>0$, $p'(10+h)=$

* Таким h остается в этом пункте и в дальнейшем.

$= -\frac{1000(20+h)h}{(100+(10+h)^2)^2} < 0$, то максимальный размер популяции составляет

$$p(10) = 1000 + \frac{1000 \cdot 10}{100+100} = 1050$$

и достигается по прошествии 10 ч роста.

Задача 3. Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела, изменении пульса или других физиологических показателей. Степень реакции зависит от назначенного лекарства, его дозы. Предположим, что x обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции y описывается функцией $y = f(x) = x^2(a - x)$, где a — некоторая положительная постоянная. При каком значении x реакция максимальна?

Решение. Очевидно, $0 < x < a$. Имеем $f'(x) = 2ax - 3x^2$. Так как $x = \frac{2}{3}a$ — корень уравнения $f'(x) = 0$ и

$$f'\left(\frac{2}{3}a - h\right) = 3h\left(\frac{2}{3}a - h\right) > 0,$$
$$f'\left(\frac{2}{3}a + h\right) = -3h\left(\frac{2}{3}a + h\right) < 0,$$

то $x = \frac{2}{3}a$ — тот уровень дозы, который дает максимальную реакцию.

Задача 4. Газовая смесь состоит из окиси азота (NO) и кислорода (O_2). Требуется найти концентрацию O_2, при которой содержащаяся в смеси окись азота окисляется с наибольшей скоростью.

Решение. В условиях практической необратимости скорость реакции

$$2NO + O_2 = 2NO_2$$

выражается формулой $v = kx^2y$, где x — концентрация NO в любой момент времени, y — концентрация O_2, k — константа скорости реакции, не зависящая от концентрации реагирующих компонентов и зависящая только от температуры. Концентрацию газов будем выражать в объемных процентах. В этом случае

$$y = 100 - x, \quad v = kx^2(100 - x) \equiv v(x).$$

Очевидно, $0 < x < 100$. Производная $v' = k(200x - 3x^2)$ между 0 и 100 имеет один-единственный корень $x = x_1 = 66{,}67$ и $v(0) = v(100) = 0$. Следовательно, скорость реакции наибольшая, когда $x = 66{,}67\%$ и $y = 33{,}33\%$.

Задача 5 (*задача Дидоны*). В древнем мифе рассказывается, что тирский царь Пигмалион убил Сихея, мужа своей сестры Дидоны, чтобы овладеть его богатством. Дидона, покинув Финикию, после многих приключений оказалась в Северной Африке. Король нумидийцев Ярб обещал подарить Дидоне участок земли на берегу моря «не больше, чем можно окружить воловьей шкурой». Хитрая Дидона разрезала воловью шкуру на тонкие полоски, связала из них очень длинную веревку и отмерила большой участок земли, примыкавший к побережью, на котором основала город Карфаген.

Будем для простоты считать, что берег моря был прямолинейным, а участок земли имел форму прямоугольника. Тогда надо найти прямоугольник наибольшей площади, ограниченный с одной стороны морем, а с трех других сторон веревкой заданной длины l.

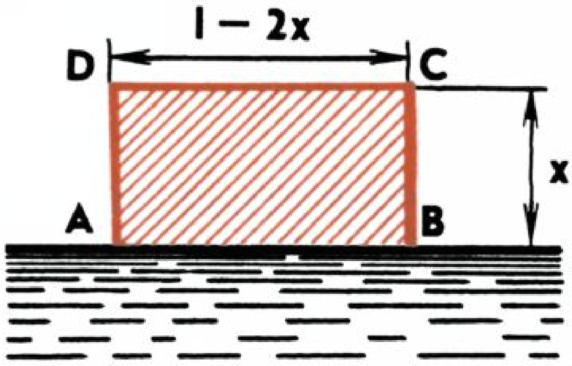

Рис. 4

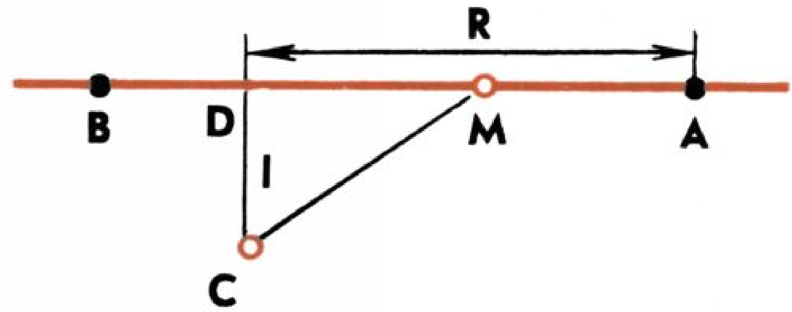

Рис. 5

Выберем в качестве аргумента x длину отрезка BC (рис. 4). Тогда длина отрезка AB равна $l-2x$ и потому площадь S прямоугольника $ABCD$ равна $x(l-2x)$, т. е.

$$S=x(l-2x)\equiv S(x).$$

Очевидно, $0<x<\frac{l}{2}$. Производная $S'=l-4x$ между 0 и $\frac{l}{2}$ обращается в нуль в единственной точке $x=\frac{l}{4}$. Это значение x и доставит функции S наибольшее значение, так как $S(0)=$ $=S\left(\frac{l}{2}\right)=0$. Значит, сторона BC должна иметь длину $\frac{l}{4}$, а сторона AB — длину $\frac{l}{2}$.

Если снять условие, что границы участка должны иметь форму прямоугольника, то можно огородить больший участок земли. Для этого он должен иметь форму полукруга.

Задача 6. Стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы. При обработке бриллиант был расколот на две части. Каковы массы частей, если известно, что при этом произошла максимальная потеря стоимости?

Решение. Пусть m — масса бриллианта до его раскола на две части, а x — масса одной из оставшихся частей. Тогда

km^2 — стоимость бриллианта до раскола,

kx^2 — стоимость одной части бриллианта,

$k(m-x)^2$ — стоимость другой части бриллианта,

$f(x)=km^2-kx^2-k(m-x)^2$ — потеря стоимости бриллианта в результате его раскола на две части (k — коэффициент пропорциональности). Очевидно, $0<x<m$. Производная

$$f'(x)=-2kx+2k(m-x)=$$
$$=-4kx+2km$$

обращается в нуль в единственной точке $x=\frac{m}{2}$.

Это значение и доставляет $f(x)$ максимальное значение, так как

$$f'\left(\frac{m}{2}-h\right)=4kh>0,\ f'\left(\frac{m}{2}+h\right)=-4kh<0.$$

Следовательно, массы частей: $\frac{m}{2}$ и $\frac{m}{2}$.

Задача 7. По прямой AB проходит железная дорога (рис. 5), в стороне от которой находится пункт C. Требуется груз из пункта C перевезти в пункт M, лежащий на железной дороге, в направлении конечного пункта назначения A с наименьшими затратами. Из C в M перевозка осуществляется автомобильным транспортом, который в m раз дороже, чем железнодорожный.

Решение. Пусть x — расстояние DM, l — кратчайшее расстояние до железной дороги от пункта C, а R — расстояние от D до конечного пункта A на железной дороге. По теореме Пифагора

$$CM=\sqrt{l^2+x^2}.$$

Стоимость проезда y выражается в виде

$$y=y(x)=k(R-x)+mk\sqrt{l^2+x^2},$$

где k — стоимость перевозки на 1 км по железной дороге. Нужно найти наименьшую стоимость провоза груза из C в A указанным путем, т. е. наименьшее значение функции y на отрезке $[0; R]$. По условию задачи $x>0$. Поэтому производная

$$y'=-k+\frac{kmx}{\sqrt{l^2+x^2}}$$

для этих значений x обращается в нуль в единственной точке $x=x_0=\frac{l}{\sqrt{m^2-1}}$. Это значение x и доставляет y минимальное значение, так как

$$y'(x_0-h)=-k+\frac{km}{\sqrt{\frac{l^2}{(x_0-h)^2}+1}}<0,$$

$$y'(x_0+h)=-k+\frac{km}{\sqrt{\frac{l^2}{(x_0+h)^2}+1}}>0.$$

Итак, при $x=x_0$ получаем наименьшие затраты на перевозки груза.

Примечание. В ответе не участвует число R. Это значит, что независимо от конечного пункта назначения груза его выгоднее всего возить к станции под углом α, таким, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{l}{x_0}=\sqrt{m^2-1}.$$

Определяется угол α только по величине m.

Например: если $m=2$, то $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$, т. е. $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ В ЗАДАЧАХ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ЭКОНОМИКИ

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Задача о пройденном пути. Требуется найти путь, пройденный движущейся по прямой точкой за отрезок времени $[t_0; T]$, если известен закон изменения мгновенной скорости $v=v(t)$. Разобьем отрезок времени $[t_0; T]$ моментами времени (точками)

$$t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$$

на n частичных отрезков времени и положим

$$\Delta t_k=t_k-t_{k-1},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda=\max\Delta t_k$. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них движение можно считать равномерным, что дает приближенное выражение для пути

$$s\approx v(\tau_1)\,\Delta t_1+v(\tau_2)\,\Delta t_2+\ldots+v(\tau_n)\,\Delta t_n,$$

где τ_k — одна из точек отрезка $[t_{k-1}; t_k]$. Эта сумма (ее коротко будем обозначать через $\sum\limits_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k$) будет тем точнее выражать искомый путь s, чем меньше будет каждый из временны́х отрезков $[t_{k-1}; t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$. Поэтому за путь s, пройденный точкой за время $T-t_0$ со скоростью $v=v(t)$, естественно принять:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k. \tag{1}$$

Задача о количестве вещества, вступившего в реакцию. Пусть скорость химического превращения некоторого вещества, участвующего в химической реакции, есть функция времени $v=v(t)$. Найти количество m вступившего в реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T.

Проделаем последовательно те же операции, что и при решении предыдущей задачи. В результате получим:

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k. \qquad (2)$$

Аналогично прирост численности популяции за промежуток времени от t_0 до T, скорость роста которой $v=v(t)$, есть

$$p=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\,\Delta t_k. \qquad (3)$$

Задача о работе переменной силы. Пусть материальная точка под действием постоянной силы F перемещается по направлению этой силы. Если пройденный путь равен s, то, как известно из курса физики, работа W этой силы F вычисляется по формуле:

$$W=Fs.$$

Пусть теперь материальная точка движется по оси Ox от точки $A(a)$ до точки $B(b)$ $(b>a)$ под действием переменной силы, направленной по Ox и являющейся функцией от x:

$$F=f(x).$$

Для нахождения работы W в этом случае разобьем отрезок $[a;\ b]$ точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$$

на n частичных отрезков и положим:

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda=\max\Delta x_k$. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них силу F можно считать постоянной (равной $f(\tau_k)$), что дает приближенное выражение для работы

$$W\approx\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k,$$

где τ_k — одна из точек отрезка $[x_{k-1};\ x_k]$. Отсюда:

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k. \qquad (4)$$

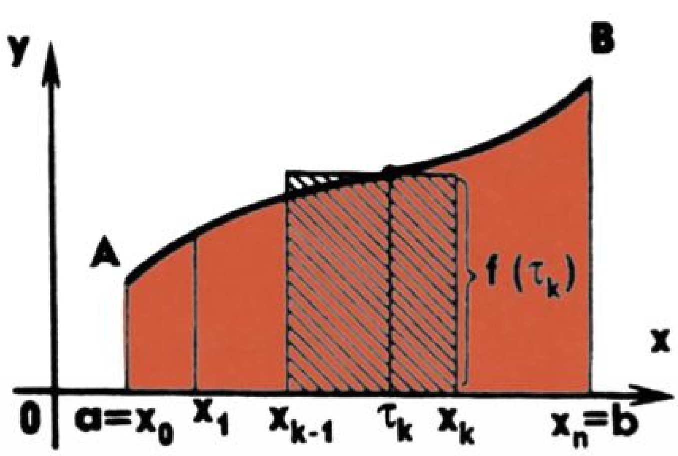

Рис. 6

Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть требуется найти площадь плоской фигуры $aABb$ (рис. 6), ограниченной графиком функции $y=f(x)$, непрерывной и неотрицательной на сегменте $[a;\ b]$, и отрезками прямых $y=0$, $x=a$, $x=b$. Эта фигура называется *кри-*

волинейной трапецией. Разобьем отрезок $[a;\ b]$ точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$$

на n частичных отрезков и положим

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1},\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda=\max \Delta x_k$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1};\ x_k]$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, выберем произвольную точку τ_k, $x_{k-1}\leqslant\tau_k\leqslant x_k$. Произведение $f(\tau_k)\,\Delta x_k$ дает площадь прямоугольника, имеющего основание Δx_k и высоту $f(\tau_k)$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k$ — приближенно площадь S криволинейной трапеции $aABb$. Отсюда, как и в предыдущих задачах:

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k. \tag{5}$$

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Из решения приведенных пяти задач видно, что хотя они имеют различный смысл, но математический аппарат для их решения один и тот же. Во всех этих задачах получаем выражение одного и того же вида (см. (1) — (5)):

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k. \tag{6}$$

Если существует конечный предел (6), не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;\ b]$ и выбора точек τ_k, то этот предел будем называть *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ и обозначать символом

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой на отрезке* $[a;\ b]$. При этом $f(x)$ называется *подынтегральной функцией,* $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением,* числа a и b — *пределами интегрирования* (a — *нижний предел,* b — *верхний предел*), сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k$ — *интегральной суммой.*

В теории определенного интеграла доказывается, что всякая непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция интегрируема на нем.

Из рассмотренных задач следует несколько утверждений.

Путь s, пройденный точкой за время $T-t_0$ со скоростью $v=v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0;\ T]$), есть $\int\limits_{t_0}^{T} v(t)\,dt$.

Аналогично количество вступившего в химическую реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T, скорость химического превращения которого $v=v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0; T]$), есть

$$\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt.$$

Если скорость роста популяции $v=v(t)$ ($v(t)$ непрерывна на $[t_0; T]$), то прирост численности популяции за промежуток времени от t_0 до T есть

$$\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt.$$

Если переменная сила $F=f(x)$ действует в направлении оси Ox ($f(x)$ непрерывна на $[a; b]$), то работа этой силы на отрезке $[a; b]$ равна

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука $F=kx$, где F — сила (в Н), x — величина растяжения или сжатия (в м), вызванного силой F, а k — коэффициент пропорциональности.

Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ геометрически представляет собой площадь S криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу — осью Ox, с боков — прямыми $x=a$ и $x=b$, т. е.

$$S=\int_{a}^{b} f(x)\,dx. \tag{7}$$

Из последнего предложения следует замечание.

Замечание. Если $f(x)\leqslant 0$ на $[a; b]$, то $-f(x)\geqslant 0$ на $[a; b]$. Поэтому площадь S соответствующей криволинейной трапеции выразится формулой

$$S=-\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

или

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|. \tag{8}$$

Если, наконец, линия $y=f(x)$ пересекает ось Ox, то отрезок $[a;\ b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака, и к каждой части применить ту из формул (7) или (8), которая ей соответствует.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Между определенным и неопределенным интегралами существует простая связь, которая позволит нам сводить вычисление определенного интеграла к уже известному вычислению неопределенного интеграла. Эту связь выражает следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на этом отрезке, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{9}$$

Формула (9) называется *формулой Ньютона — Лейбница**. Эта формула дает удобное правило вычисления определенного интеграла. Кроме того, она устанавливает связь между определенным интегралом и неопределенным интегралом.

Доказательство. Разобьем отрезок $[a;\ b]$ на n частичных отрезков точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b.$$

Согласно формуле Лагранжа и формуле $F'(x)=f(x)$ имеем:

$$F(x_1)-F(a)=F'(c_1)(x_1-a)=f(c_1)\,\Delta x_1,\ a<c_1<x_1,$$

$$F(x_2)-F(x_1)=F'(c_2)(x_2-x_1)=f(c_2)\,\Delta x_2,\ x_1<c_2<x_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(b)-F(x_{n-1})=F'(c_n)(b-x_{n-1})=f(c_n)\,\Delta x_n,\ x_{n-1}<c_n<b.$$

Суммируя эти равенства, получим:

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k. \tag{10}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то

---

*Исаак Ньютон (1643—1727)— английский математик и физик; Готфрид Лейбниц (1646—1716) — немецкий философ и математик. Ньютон и Лейбниц — создатели дифференциального и интегрального исчисления.

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, переходя в (10) к пределу при $\lambda \to 0$, получим искомую формулу (9).

Примечание. Для краткости записи употребляются обозначения:

$$F(x)\,|_a^b = F(b) - F(a) \text{ (или } [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)).$$

Поэтому формула Ньютона — Лейбница принимает вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,|_a^b \text{ (или } [F(x)]_a^b).$$

Заметим, что в формуле (9) можно взять любую из первообразных для $f(x)$, так как

$$[F(x)+C]_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

Таблицу основных интегралов и основные свойства неопределенного и определенного интегралов можно найти в учебниках.

Укажем еще на следующее *свойство первообразной:*

если $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, а k и b постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k} F(kx+b)$ есть первообразная для функции $f(kx+b)$.

Действительно, с учетом формулы производной сложной функции имеем

$$\left(\frac{1}{k} F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k} F'(kx+b) \cdot k = f(kx+b).$$

Пример 1. Найти одну из первообразных для каждой из следующих функций:

а) $(kx+b)^{\mu}$ (μ, k, b — постоянные, причем $\mu \neq -1$, $k \neq 0$);
б) $\cos(kx+b)$ (k, b — постоянные, причем $k \neq 0$);
в) e^{kx} (k — постоянная, причем $k \neq 0$);
г) $\frac{1}{x+10}$ ($x > -10$).

Решение. Для функции x^{μ} одной из первообразных является функция $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$, поэтому по только что установленному свойству первообразной искомая первообразная равна

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{(kx+b)^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Аналогично устанавливается, что в случаях б), в), г) искомыми первообразными являются соответственно функции

$$\frac{1}{k}\sin(kx+b), \quad \frac{1}{k}e^{kx}, \quad \ln(x+10).$$

В частности, для функций

$$e^{-x}, \quad \sin 2x, \quad \cos 2x, \quad \sqrt{1+x}, \quad (kx+b)^2$$

искомыми первообразными будут соответственно функции

$$-e^{-x}, \quad -\frac{1}{2}\cos 2x, \quad \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^3}{3}.$$

Пример 2. Найти интегралы.

1) $\int\limits_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$

2) $\int\limits_0^{\pi} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0.$

3) $\int\limits_0^1 e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - \frac{1}{e}.$

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = 1.$

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$

6) $\int\limits_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.$

Пример 3. Скорость движения тела задана уравнением

$$v = 12t - 3t^2 \ (\text{м/с}).$$

Найти путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

Решение. Скорость тела равна нулю в момент начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для этого приравняем скорость к нулю и решим уравнение относительно t:

$$12t - 3t^2 = 0, \ t(4-t) = 0, \ t_1 = 0, \ t_2 = 4.$$

Теперь искомый путь будет:

$$s = \int\limits_0^4 (12t - 3t^2)\,dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = 32 \ (\text{м}).$$

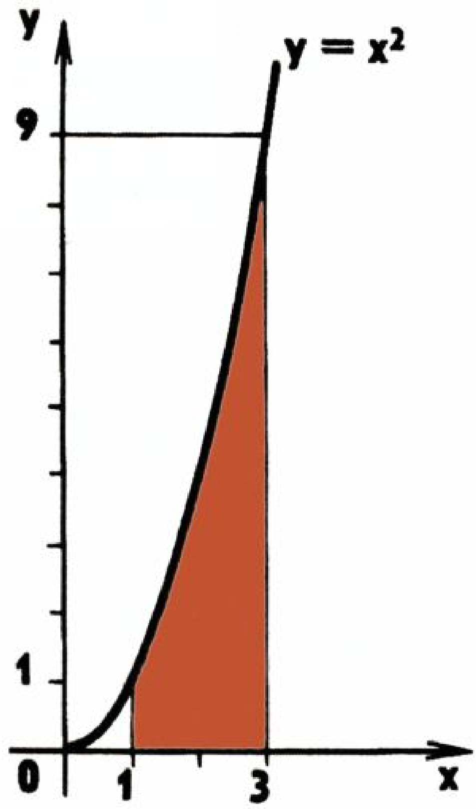

Рис. 7

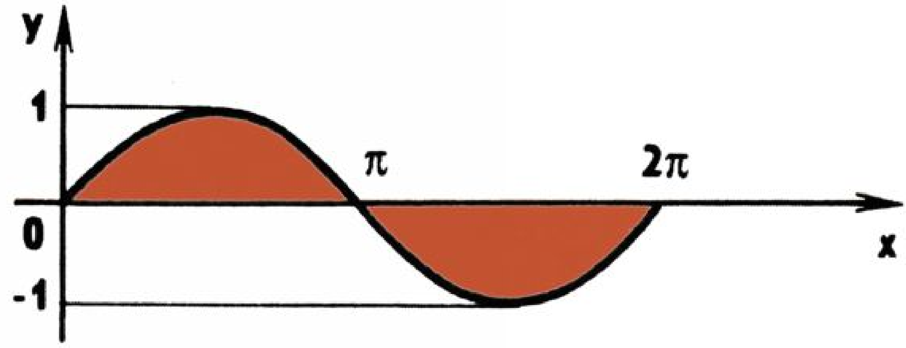

Рис. 8

Пример 4. Сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.

Решение. Из условия следует, что $10=k\cdot 0{,}01$, откуда $k=1000$ и, следовательно, $F=1000x$, т. е. $f(x)=1000x$. Поэтому искомая работа

$$W=\int_0^{0,04} 1000x\,dx=500x^2\Big|_0^{0,04}=0{,}8 \text{ (Дж)}.$$

Пример 5. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, прямыми $x=1$, $x=3$ и осью Ox (рис. 7).

Решение. Пользуясь формулой (7), находим искомую площадь:

$$S=\int_1^3 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_1^3=\frac{1}{3}(27-1)=8\frac{2}{3}.$$

Пример 6. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sin x$ и осью абсцисс при условии $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ (рис. 8).

Решение. Разбиваем отрезок $[0;\,2\pi]$ на два отрезка $[0;\,\pi]$ и $[\pi;\,2\pi]$. На первом из них $\sin x\geqslant 0$, на втором $\sin x\leqslant 0$. Следовательно, используя формулы (7) и (8), имеем, что искомая площадь равна

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right|=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\left|(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right|=4.$$

Пример 7. Найти площадь S круга радиусом R.

Решение. Уравнение окружности радиусом R с центром в начале координат: $x^2+y^2=R^2$. Отсюда уравнение верхней ее половины $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и, значит,

$$S=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Используя теперь в этом интеграле подстановку $x=R\sin\varphi$, найдем

$$S=2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi=2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$=R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=R^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi R^2.$$

Как установлено выше, если скорость прямолинейного движения материальной точки $v=v(t)$ известна, то путь, пройденный этой точкой за промежуток времени от t_0 до T, равен

$$\int_{t_0}^{T}v(t)\,dt.$$

Отметим, что это вытекает и из формулы Ньютона — Лейбница.

В самом деле, из определения $v(t)$ следует, что эта функция является производной от закона движения точки $s=s(t)$ в момент t и, следовательно, $s(t)$ есть первообразная для $v(t)$. Поэтому согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$s(T)-s(t_0)=\int_{t_0}^{T}v(t)\,dt. \qquad (11)$$

Аналогично количество вступившего в химическую реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T, скорость химического превращения которого $v=v(t)$, есть

$$m(T)-m(t_0)=\int_{t_0}^{T}v(t)\,dt. \qquad (12)$$

Таким же образом если скорость роста популяции $v=v(t)$, то прирост численности популяции за промежуток времени от t_0 до T есть

$$p(T)-p(t_0)=\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt. \qquad (13)$$

Задача о выработке продукции. Определить дневную выработку рабочего по известной производительности труда $f(t)$ (t — в часах) от начала рабочего дня $t=a$ до конца рабочего дня $t=b$.

Решение. Обозначим через $F(t)$ выработку рабочего к моменту времени t, т. е. $F(t)$ — это число единиц продукции, произведенных рабочим от начала рабочего дня до момента времени t. Из формулы (1) пункта «Определение производной» следует, что $F(t)$ — первообразная для функции $f(t)$. Поэтому, как и равенства (11) — (13), имеем равенство

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a). \qquad (14)$$

Правая часть формулы (14) даст выработку рабочего за промежуток времени $[a;\ b]$, т. е дневную выработку. Таким образом, дневная выработка B этого рабочего равна интегралу от производительности труда $f(t)$:

$$B=\int_a^b f(t)\,dt.$$

На основе формулы Ньютона — Лейбница устанавливается теорема 2, называемая *теоремой о среднем.*

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то в интервале $(a;\ b)$ найдется такая точка c, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c). \qquad (15)$$

Доказательство. По формуле Ньютона — Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

где $F'(x)=f(x)$. Но в силу формулы Лагранжа (с. 14)

$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(c)=(b-a)f(c),\ a<c<b,$$

что и приводит к искомой формуле (15).

Формула (15) при $f(x)>0$ имеет простое геометрическое истолкование. Площадь криволинейной трапеции $aABb$ равна пло-

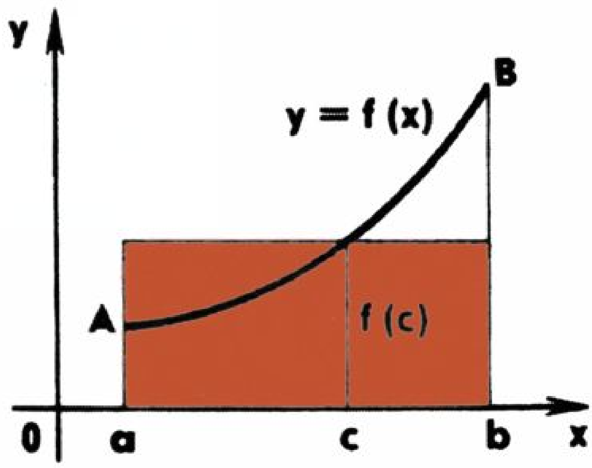

Рис. 9

щади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной $f(c)$ (рис. 9). Из формулы (15) имеем:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Дробь, стоящая справа, называется *средним значением функции на отрезке* $[a;\ b]$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ДУГИ КРИВОЙ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Пусть дуга AB (рис. 10) задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ — функция, имеющая на отрезке $[a;\ b]$ непрерывную производную.

Длиной дуги AB называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремится к нулю.

Найдем длину дуги AB. Впишем в дугу AB ломаную линию $M_0M_1M_2 \dots M_n$ (рис. 10). Пусть абсциссы точек $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ соответственно

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n=b$$

(ординаты этих точек обозначим соответственно через y_0, y_1, y_2, ..., y_n). Имеем разбиение отрезка $[a;\ b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};\ x_k]$, $k=1,\ 2, \dots, n$. Длина отрезка $[x_{k-1};\ x_k]$ равна $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Пусть $\lambda=\max \Delta x_k$. Через Δy_k обозначим приращение функции $y=f(x)$ на отрезке $[x_{k-1};\ x_k]$. По теореме Пифагора $M_{k-1}M_k=\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$. Но в силу формулы Лагранжа $\Delta y_k=f'(c_k)\,\Delta x_k$, где c_k — некоторая промежуточная точка отрезка $[x_{k-1};\ x_k]$. Отсюда $M_{k-1}M_k=\sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,\Delta x_k$ и, следовательно, длина ломаной линии $M_0M_1M_2 \dots M_n$ равна

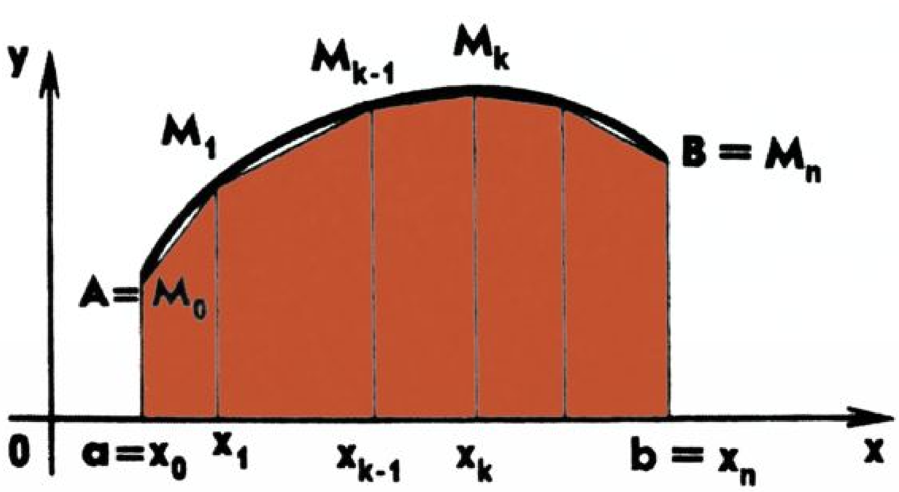

Рис. 10

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(c_k))^2}\, \Delta x_k.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$l=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx \quad (f'^2(x)=(f'(x))^2)$$

или

$$l=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx \tag{16}$$

(l — длина дуги AB).

Пример 1. Найти длину дуги линии (рис. 11)

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

Имеем $y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ и по формуле (16) находим

$$l=\int_0^1 \sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})}\, dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 (e^x+e^{-x})\, dx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big|_0^1=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right).$$

Пример 2. Вычислить длину окружности радиуса R.

Уравнение верхней половины окружности с центром в начале координат радиуса R:

$$y=\sqrt{R^2-x^2}.$$

Отсюда

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}},$$

$$y'^2=\frac{x^2}{R^2-x^2},\ 1+y'^2=\frac{R^2}{R^2-x^2}.$$

Теперь согласно формуле (16) искомая длина l окружности равна

$$l=2\int_{-R}^{R} \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Используя в этом интеграле подстановку $x=R\sin\varphi$, найдем

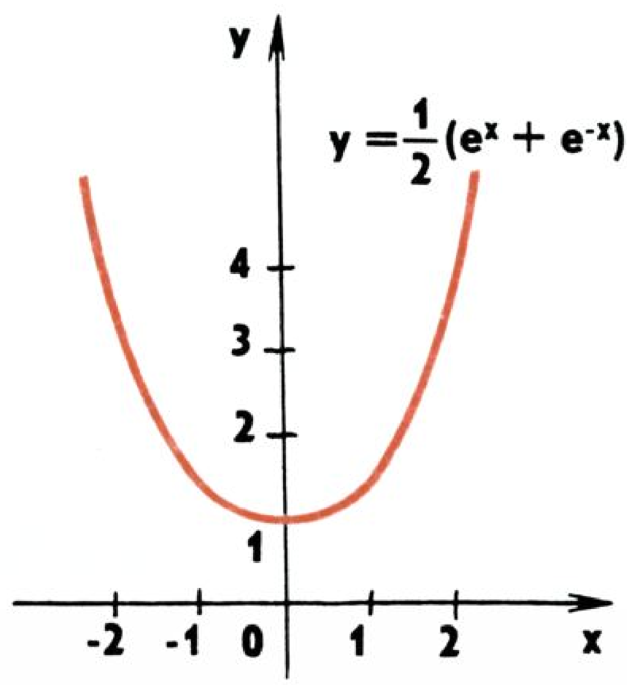

Рис. 11

$$l=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{R^2(1-\sin^2\varphi)}}=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{R\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi}=2R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=$$

$$=2R\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi R.$$

Переходя к площади поверхности вращения, предположим, что, как и выше, дуга AB задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ — функция, имеющая на отрезке $[a;\ b]$ непрерывную производную. Поверхность, образованная вращением k-го звена ломаной $M_0M_1M_2\ldots M_n$ вокруг оси Ox, есть боковая поверхность усеченного конуса с площадью

$$\pi(y_{k-1}+y_k)\,M_{k-1}M_k$$

или

$$2\pi f(\eta_k)\sqrt{1+f'^2(c_k)}\,\Delta x_k,$$

где $f(\eta_k)=\dfrac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$.

Следовательно, площадь поверхности вращения ломаной $M_0M_1M_2\ldots M_n$ вокруг оси Ox равна:

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}2\pi f(\eta_k)\sqrt{1+f'^2(c_k)}\,\Delta x_k. \tag{17}$$

Площадь σ поверхности вращения дуги AB вокруг оси Ox определим как $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma_n$. Заметим при этом, что сумма (17) не является интегральной суммой для функции $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$, так как в слагаемом, соответствующем отрезку $[x_{k-1};\ x_k]$, значения функций $f(x)$ и $f'^2(x)$ взяты в разных точках этого отрезка. Но можно доказать, что предел суммы (17) равняется пределу интегральной суммы для функции $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$, т. е.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma_n=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}2\pi f(c_k)\sqrt{1+f'^2(c_k)}\,\Delta x_k.$$

Поэтому

$$\sigma=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{18}$$

Пример 3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы $y^2=4x$, $0\leqslant x\leqslant 3$ (рис. 12).

Имеем $2yy'=4$, откуда $y'^2=\dfrac{4}{y^2}=\dfrac{4}{4x}=\dfrac{1}{x}$.

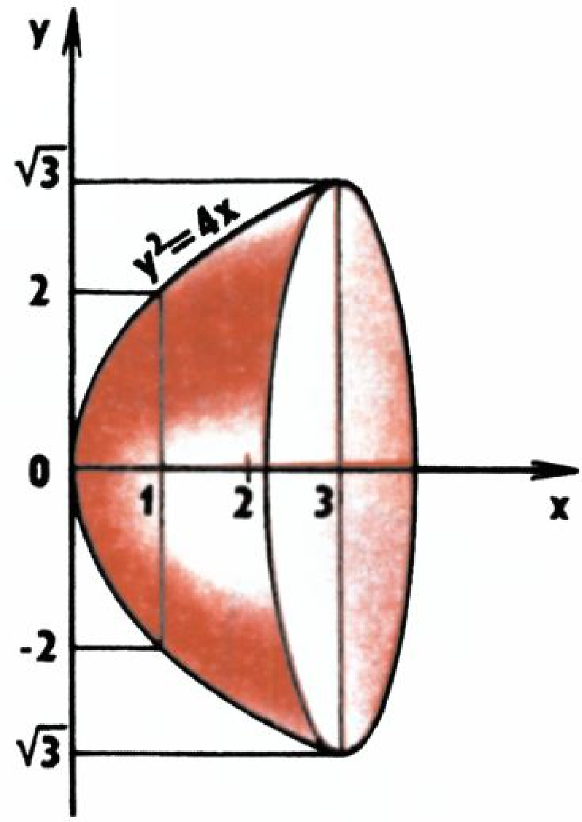

Рис. 12

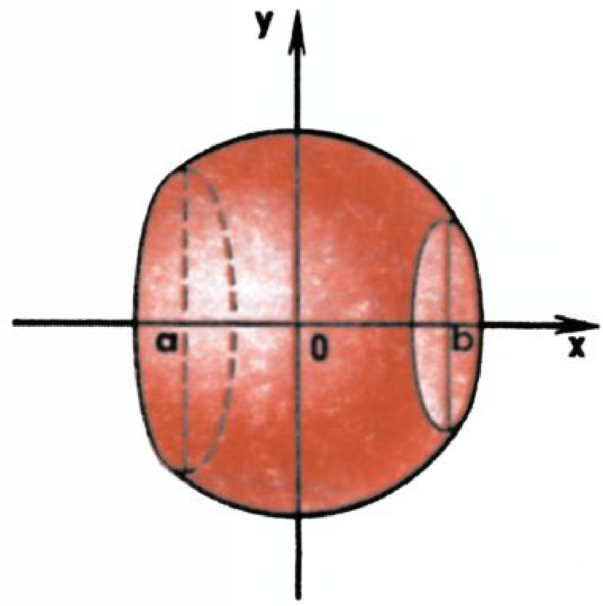

Рис. 13

Теперь согласно формуле (18) искомая площадь поверхности вращения $\sigma=2\pi\int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx=4\pi\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx$. Далее, так как $\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx=\frac{14}{3}$ (см. пункт «Формула Ньютона — Лейбница и ее применение», пример 2), то окончательно получаем, что

$$\sigma=4\pi\cdot\frac{14}{3}=\frac{56\pi}{3}.$$

Пример 4. Найти площадь поверхности шарового пояса (рис. 13), образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, соответствующей изменению x от a до b $(-R\leqslant a<0,\ 0<b\leqslant R)$.

Решение. Здесь

$$y=\sqrt{R^2-x^2},\ y'=-\frac{x}{y},\ 1+y'^2=\frac{R^2}{y^2}$$

и по формуле (18)

$$\sigma=2\pi R\int_a^b dx=2\pi R\,(b-a).$$

В частности, при $b=R$ получаем площадь сферического сегмента радиуса R и высоты H: $\sigma=2\pi RH$.

При $a=-R$, $b=R$ — площадь сферы радиуса R

$$\sigma=4\pi R^2.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА

Рассмотрим тело T, содержащееся между плоскостями $x=a$ и $x=b$ (рис. 14). Пусть для каждого x из отрезка $[a;\ b]$ дана площадь сечения этого тела $Q(x)$ плоскостью, перпендикулярной оси Ox. Найдем объем V данного тела при условии непрерывности $Q(x)$ в $[a;\ b]$. Разделим отрезок $[a;\ b]$ на n частей и через точки деления проведем плоскости, перпендикулярные оси Ox. Эти плоскости разобьют T на слои. Выделим k-й слой, ограниченный плоскостями $x=x_{k-1}$ и $x=x_k$.

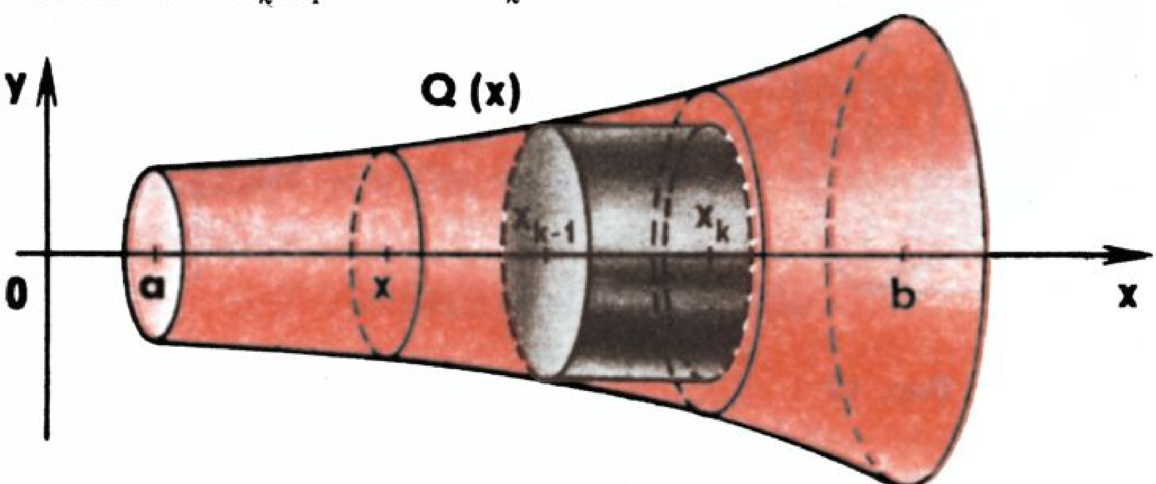

Рис. 14

Объем этого слоя приближенно равен $Q(x_{k-1})\,\Delta x_k$. Образуем сумму $V_n=\sum\limits_{k=1}^{n} Q(x_{k-1})\,\Delta x_k$. Объем V тела T определим как $\lim\limits_{\lambda\to 0} V_n$. Этот предел существует в силу непрерывности $Q(x)$ на $[a;\ b]$ и равен $\int\limits_a^b Q(x)\,dx$. Итак,

$$V=\int\limits_a^b Q(x)\,dx. \tag{19}$$

В частности, если тело образовано поверхностью вращения линии $y=f(x)$ вокруг оси Ox в пределах изменения x от a до b, то $Q(x)=\pi\,(f(x))^2$ и

$$V=\pi\int\limits_a^b (f(x))^2\,dx$$

или, более кратко,

$$V=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx. \tag{20}$$

Пример 1. Найти объем пирамиды, высота которой равна H и площадь основания S.

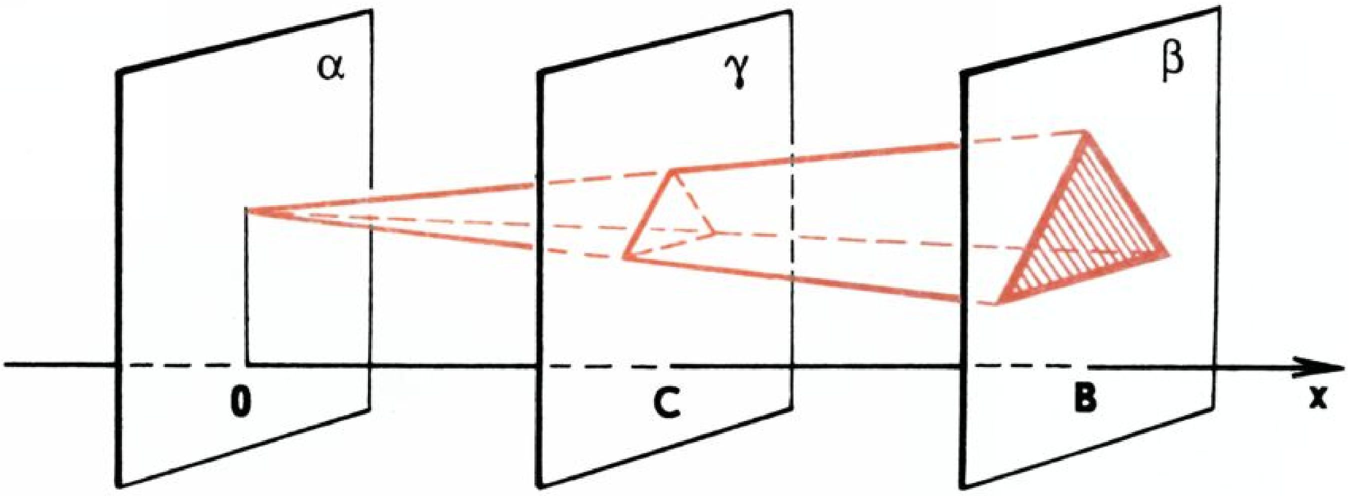

Рис. 15

Решение. Пусть β — плоскость, в которой лежит основание пирамиды. Проведем через вершину пирамиды плоскость α, параллельную плоскости β (рис. 15). Ось Ox выберем так, чтобы она была перпендикулярна плоскостям α и β. Точку пересечения плоскости α с осью Ox примем за начало координат, тогда абсцисса вершины пирамиды равна нулю. В этом случае абсцисса точки B пересечения плоскости β с осью Ox равна H. Рассмотрим поперечное сечение пирамиды плоскостью γ, перпендикулярной оси Ox и отстоящей от вершины O на расстояние x. Площадь этого сечения обозначим через $Q(x)$.

Как известно, в пирамиде площадь основания и площадь сечения, параллельного основанию, относятся как квадраты их расстояний от вершины, поэтому

$$\frac{Q(x)}{S}=\frac{x^2}{H^2}, \text{ т. е. } Q(x)=\frac{S}{H^2}x^2.$$

Для вычисления объема пирамиды применим формулу (19):

$$V=\int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx=\frac{S}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{1}{3}SH.$$

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y^2=x$ и $x=1$, вокруг оси Ox (рис. 16). Это тело называется сегментом параболоида вращения.

Решение. Согласно формуле (20) имеем:

$$V=\pi\int_0^1 xdx=\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

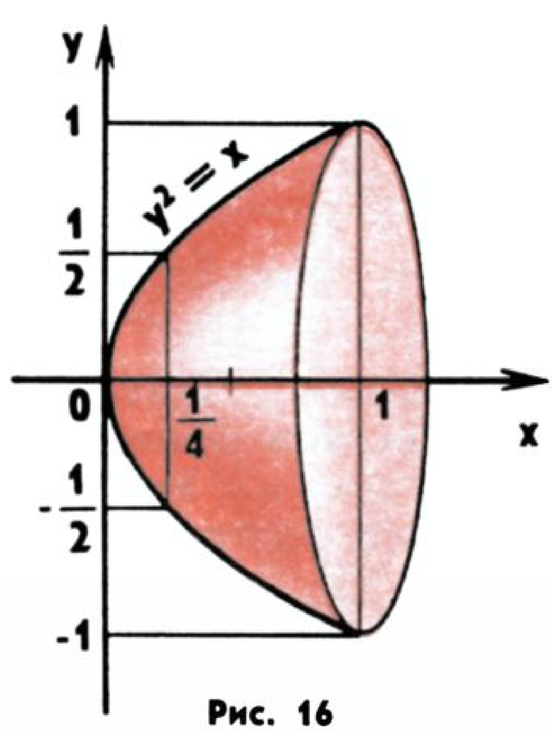

Рис. 16

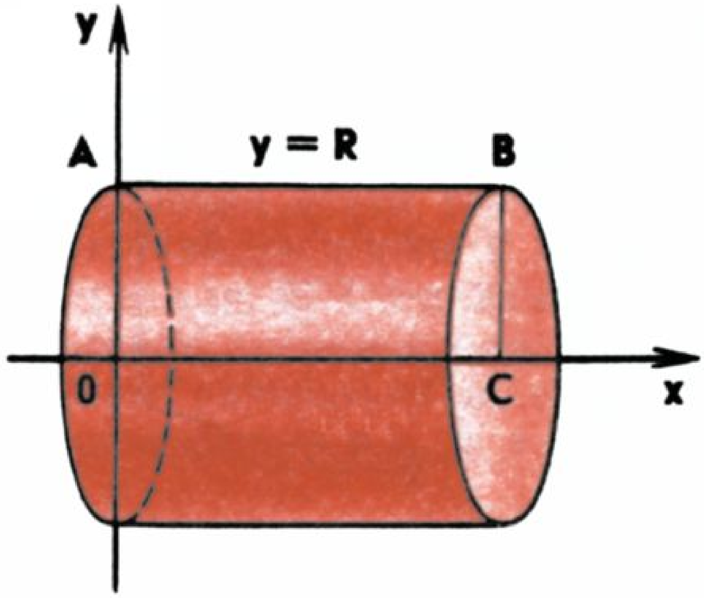

Рис. 17

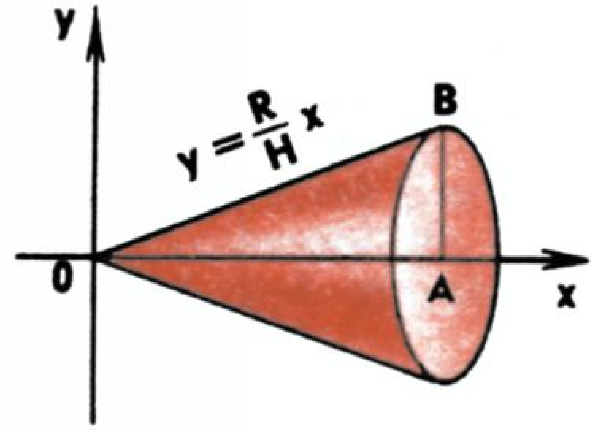

Рис. 18

Пример 3. Найти объем прямого кругового цилиндра с высотой, равной H, и радиусом основания R.

Решение. Рассматривая данный цилиндр как тело, полученное вращением прямоугольной плоской фигуры с вершинами в точках $O(0;\ 0)$, $A(0;\ R)$, $B(H;\ R)$, $C(H;\ 0)$ вокруг оси Ox (рис. 17), будем иметь

$$V=\pi\int\limits_0^H R^2dx=\pi R^2H.$$

Пример 4. Найти объем прямого кругового конуса с высотой, равной H, и радиусом основания R.

Решение. Рассматривая данный конус как тело, полученное вращением треугольника с вершинами в точках $O(0;\ 0)$, $A(H;\ 0)$, $B(H;\ R)$ вокруг оси Ox (рис. 18), получим, что в формуле (20)

$$y=\frac{R}{H}x,\ a=0,\ b=H.$$

Следовательно,

$$V=\pi\int\limits_0^H\frac{R^2}{H^2}x^2dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^H=\frac{\pi R^2H}{3}. \qquad (21)$$

Пример 5. Найти объем прямого кругового усеченного конуса с радиусами оснований r и R и высотой H (рис. 19).

Решение. Усеченный конус можно получить вращением вокруг оси Ox трапеции $OABC$. Прямая AB имеет угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{R-r}{H}$ и отсекает от оси Oy отрезок OA, по длине равный r. Поэтому уравнение этой прямой $y=\frac{R-r}{H}\cdot x+r$.

Используя формулу (20), получаем:

$$V=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}\cdot x+r\right)^2 dx.$$

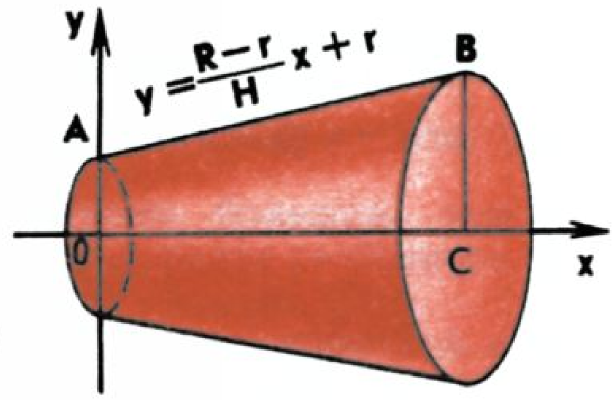

Рис. 19

Отсюда так как одной из первообразных для функции $(kx+b)^2$ является функция $\frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^3}{3}$, то согласно формуле Ньютона — Лейбница

$$V=\pi\frac{H}{R-r}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^3\Big|_0^H=$$

$$=\frac{\pi H}{3(R-r)}(R^3-r^3)=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

Пример 6. Найти объем шара радиуса R, шарового слоя и шарового сегмента.

Решение. По формуле (20) при $y=\sqrt{R^2-x^2}$ получаем

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Аналогично выводится формула объема шарового слоя, который получается при вращении вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $x=a$, $x=b$ $(-R\leqslant a<0$, $0<b\leqslant R)$, $y=0$:

$$V=\pi\left(R^2(b-a)-\frac{b^3-a^3}{3}\right).$$

Из этой формулы при $a=R-H$ и $b=R$ получаем формулу объема шарового сегмента радиуса R и высоты H:

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right). \qquad (22)$$

Пример 7. Найти объем шарового сектора радиуса R, соответствующий сегмент которого имеет высоту, равную H (рис. 20).

Если $H<R$, то согласно формулам (22) и (21) искомый объем равен $V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)+\frac{1}{3}\pi r^2(R-H)$, где первое слагаемое — объем шарового сегмента, а второе слагаемое — объем конуса. Так как $r^2=2RH-H^2$, то

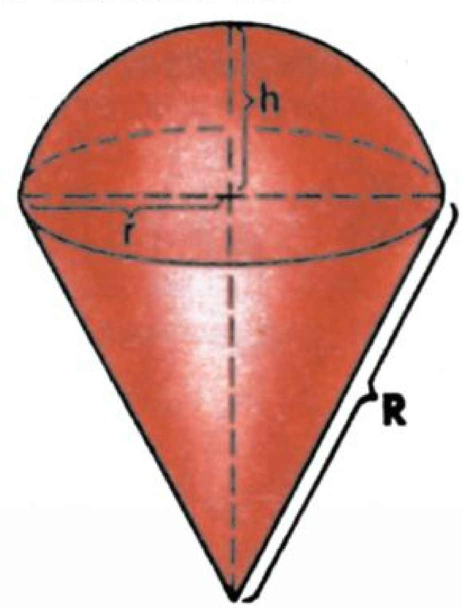

Рис. 20

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)+\frac{1}{3}\pi(2RH-H^2)(R-H)=\frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Аналогично рассматривается случай $R<H$.

ПОЛЕТ РАКЕТЫ

Задача о запуске ракеты. Определить работу W, необходимую для запуска ракеты массой $m_р$ с поверхности Земли вертикально вверх на высоту h. (Сопротивлением воздуха пренебрегаем.)

Решение. Ось Ox направим вертикально вверх, ее начало считаем центром Земли. Далее, обозначим через F величину силы притяжения ракеты Землей. Пусть $m_з$ — масса Земли. Согласно закону Ньютона

$$F=k\frac{m_р m_з}{x^2},$$

где x — расстояние от ракеты до центра Земли, $k>0$ — коэффициент пропорциональности, одинаковый для всех тел в природе, называемый постоянной всемирного тяготения или гравитационной постоянной $\left(k=6{,}67\cdot10^{-11}\frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}\right)$. Полагая $km_р m_з=\gamma$, получим $F(x)=\frac{\gamma}{x^2}$; $R\leqslant x\leqslant h+R$, R — радиус Земли. При $x=R$ сила $F(R)=\frac{\gamma}{R^2}$ равна весу P ракеты, поэтому $\gamma=PR^2$ и $F(x)=\frac{PR^2}{x^2}$. Значит,

$$W=\int_R^{R+h}F(x)\,dx=PR^2\int_R^{R+h}\frac{dx}{x^2}=-PR^2\frac{1}{x}\Big|_R^{R+h}=\frac{PRh}{R+h}.$$

Задача о вычислении второй космической скорости. Имея в виду предыдущую задачу, вычислим начальную скорость ракеты v_2, при которой она способна выйти из поля притяжения Земли и уйти в межпланетное пространство, т. е. на сколь угодно большое расстояние от Земли. Это значение v_2 называют *второй космической скоростью.*

Решение. В предыдущей задаче с помощью определенного интеграла была подсчитана работа силы, необходимая для запуска ракеты массой $m_р$ с поверхности Земли на высоту h, т. е. было получено

$$W=\int_R^{R+h} F(x)\,dx=\frac{PRh}{R+h} \text{ или } W=\frac{Ph}{1+\frac{h}{R}},$$

откуда следует, что при R, несравнимо большем, чем h, $W\approx m_p gh$, где m_p — масса ракеты, g — ускорение свободного падения у поверхности Земли.

В силу закона сохранения энергии сумма кинетической и потенциальной энергии ракеты во все моменты времени одна и та же. Следовательно, чтобы полностью освободить ракету от земного притяжения, необходимо, чтобы начальная кинетическая энергия была не меньше потенциальной энергии ракеты, бесконечно удаленной от Земли, т. е. надо подсчитать работу силы при $h\to\infty$:

$$\lim_{h\to\infty}\frac{PRh}{R+h}=\lim_{h\to\infty}\frac{PR}{1+\frac{R}{h}}=PR=m_p gR.$$

(Движение Земли и притяжение других планет при этом не учитываются.) Отсюда начальная скорость ракеты v_2 должна быть такова, чтобы

$$\frac{m_p v_2^2}{2}\geqslant m_p gR$$

или

$$v_2\geqslant\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 6\,400\,000}\approx 11{,}3\cdot 10^3 \text{ м/с}=11{,}3 \text{ км/с}$$

(при вычислениях здесь можно использовать калькулятор, g взято равным 10 м/с^2).

З а м е ч а н и е. Законы механики позволили определить и так называемую первую космическую скорость v_1, т. е. такую начальную скорость движения ракеты, при которой ракета, запущенная в горизонтальном направлении из точки, находящейся над поверхностью Земли, начинает вращаться по круговой орбите в виде спутника. Расчеты показали, что

$$v_1\approx 7{,}90 \text{ км/с}.$$

Если начальная скорость ракеты равна 11,3 км/с, то ее траектория движения представляет собой параболу. При начальной скорости, большей 11,3 км/с, траектория будет представлять собой гиперболу.

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Центр тяжести $(x_c;\ y_c)$ системы материальных точек $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, ..., $(x_n;\ y_n)$ с массами m_1, m_2, ..., m_n соответственно имеет координаты

$$x_c=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}, \quad y_c=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}.$$

Заметим, что для однородной системы материальных точек ($m_1=m_2=...=m_n$) координаты центра тяжести

$$x_c=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad y_c=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$$

не зависят от величины массы, а зависят исключительно от расположения точек.

Эти формулы распространяются на непрерывно распределенные по длине или по площади массы. Роль конечных сумм тогда играют интегралы. Так, если дуга AB задана уравнением $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$, где $f(x)$ — функция, имеющая непрерывную производную, и на этой дуге распределено вещество с постоянной плотностью, то координаты центра тяжести $(x_c;\ y_c)$ однородной материальной дуги AB определяются по формулам:

$$x_c=\frac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}, \qquad y_c=\frac{\int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

Если же имеем плоскую фигуру, ограниченную линиями $x=a$, $x=b$, $y=0$, $y=f(x)$, где $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;\ b]$, и на ней распределено вещество с постоянной плотностью, то координаты центра тяжести $(x_c;\ y_c)$ этой однородной плоской фигуры определяются по формулам:

$$x_c=\frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}, \qquad y_c=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx}.$$

Пример 1. Найти центр тяжести массы, распространенной вдоль полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ при условии постоянной плотности.

Решение. Из соображений симметрии заключаем, что $x_c=0$. Далее имеем:

$$\int_{-R}^{R}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\pi R,\quad \int_{-R}^{R}y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2R^2$$

и, значит,

$$y_c=\frac{2R^2}{\pi R}=\frac{2R}{\pi}\approx 0{,}637R.$$

(Здесь можно использовать калькулятор.)

Пример 2. Найти центр тяжести однородного полукруга, ограниченного осью Ox и полуокружностью $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

Решение. Из соображений симметрии заключаем, что $x_c=0$. Далее имеем:

$$\int_{-R}^{R}y\,dx=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\frac{\pi R^2}{2},$$

$$\int_{-R}^{R}y^2dx=\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\left(Rx-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}R^3.$$

Поэтому

$$y_c=\frac{4R}{3\pi}\approx 0{,}424R.$$

ЧИСЛЕННОСТЬ ПОПУЛЯЦИИ

Число особей в популяции (численность популяции) меняется со временем. Если условия существования популяции благоприятны, то рождаемость превышает смертность и общее число особей в популяции растет со временем. Назовем *скоростью роста популяции* прирост числа особей в единицу времени. Обозначим эту скорость $v=v(t)$. В «старых», установившихся популяциях, давно обитающих в данной местности, скорость роста $v(t)$ мала и медленно приближается к нулю. Но если популяция молода, ее взаимоотношения с другими местными популяциями еще не установились или существуют внешние причины, изменяющие эти взаимоотношения, например сознательное вмешательство человека, то $v(t)$ может значительно колебаться, уменьшаясь или увеличиваясь.

Если известна скорость роста популяции $v(t)$, то прирост численности популяции $N(t)$ за промежуток времени от t_0 до T есть

$$N(T)-N(t_0)=\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt. \qquad (23)$$

Известно, что в условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций экспоненциальна, т. е. $v(t)=ae^{kt}$. Популяция в этом случае как бы «не стареет». Такие условия можно создать, например, для микроорганизмов, пересаживая время от времени развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой. Применяя формулу (23), в этом случае получим

$$N(T)=N(t_0)+a\int_{t_0}^{T} e^{kt}dt$$

или

$$N(T)=N(t_0)+\frac{a}{k}e^{kt}\Big|_{t_0}^{T}=N(t_0)+\frac{a}{k}\left(e^{kT}-e^{kt_0}\right). \qquad (24)$$

По формуле, подобной формуле (24), подсчитывается, в частности, численность культивируемых плесневых грибков, выделяющих пенициллин.

БИОМАССА ПОПУЛЯЦИИ

Рассмотрим популяцию, в которой масса особи заметно меняется в течение жизни, и подсчитаем общую биомассу популяции.

Пусть τ означает возраст в тех или иных единицах времени, а $N(\tau)$ — число особей популяции, возраст которых равен τ. Пусть, наконец, $P(\tau)$ — средняя масса особи возраста τ, а $M(\tau)$ — биомасса всех особей в возрасте от 0 до τ.

Заметив, что произведение $N(\tau)P(\tau)$ равно биомассе всех особей возраста τ, рассмотрим разность

$$M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau),$$

где $\Delta\tau>0$. Очевидно, что эта разность, равная биомассе всех особей в возрасте от τ до $\tau+\Delta\tau$, удовлетворяет неравенствам

$$N(\check{\tau})P(\check{\tau})\Delta\tau\leqslant M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)\leqslant N(\hat{\tau})P(\hat{\tau})\Delta\tau, \qquad (25)$$

где $N(\check{\tau})P(\check{\tau})$ — наименьшее, а $N(\hat{\tau})P(\hat{\tau})$ — наибольшее значение функции $N(\tau)P(\tau)$ на отрезке $[\tau;\ \tau+\Delta\tau]$. Учитывая, что $\Delta\tau>0$, из неравенств (25) имеем:

$$N(\check{\tau})P(\check{\tau})\leqslant\frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau}\leqslant N(\hat{\tau})P(\hat{\tau}).$$

Из непрерывности функции $N(\tau)P(\tau)$ (ее непрерывность следует из непрерывности $N(\tau)$ и $P(\tau)$) следует, что

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}(N(\check{\tau})P(\check{\tau}))=\lim_{\Delta\tau\to 0}(N(\hat{\tau})P(\hat{\tau}))=N(\tau)P(\tau).$$

Поэтому согласно известной теореме о пределах будем иметь

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau}=N(\tau)P(\tau)$$

или

$$M'(\tau)=N(\tau)P(\tau).$$

Следовательно, биомасса $M(\tau)$ является первообразной для $N(\tau)P(\tau)$. Отсюда

$$M(T)-M(0)=\int_0^T N(\tau)P(\tau)\,d\tau,$$

где T — максимальный возраст особи в данной популяции. Так как $M(0)$, очевидно, равно нулю, то окончательно получаем

$$M(T)=\int_0^T N(\tau)P(\tau)\,d\tau.$$

СРЕДНЯЯ ДЛИНА ПРОЛЕТА

В некоторых исследованиях необходимо знать среднюю длину пробега или среднюю длину пути при прохождении животным некоторого фиксированного участка. Приведем соответствующий расчет для птиц. Пусть участком будет круг радиуса R. Будем считать, что R не слишком велико, так что большинство птиц изучаемого вида пересекает этот круг по прямой.

Птица может под любым углом в любой точке пересечь окружность. В зависимости от этого длина ее пролета над кругом может быть равной любой величине от 0 до $2R$. Нас интересует средняя длина пролета. Обозначим ее через l.

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, нам достаточно ограничиться лишь теми птицами, которые летят в каком-нибудь одном направлении, например параллельно оси Oy. Тогда средняя длина пролета — это среднее расстояние между дугами ACB и AC_1B (рис. 21). Иными словами, это среднее значение функции $f_1(x) - f_2(x)$, где $y = f_1(x)$ — уравнение верхней дуги, а $y = f_2(x)$ — уравнение нижней дуги, т. е.

$$l = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

или

$$l = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx\right). \qquad (26)$$

Так как $\int_a^b f_1(x)\,dx$ равен площади криволинейной трапеции $aACBb$, а $\int_a^b f_2(x)\,dx$ равен площади криволинейной трапеции aAC_1Bb, то их разность равна площади круга, т. е. πR^2. Разность $b-a$ равна, очевидно, $2R$. Подставив это в формулу (26), получим

$$l = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi}{2} R.$$

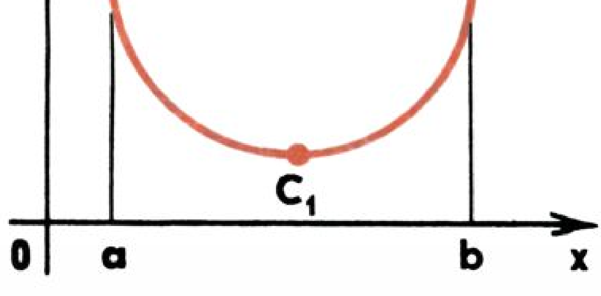

Рис. 21

Приведенные примеры далеко не исчерпывают возможности приложений определенного интеграла в биологии.

Дифференциальные уравнения в естествознании и экономике

ПОНЯТИЕ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В различных областях науки и техники весьма часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить одно или несколько уравнений, содержащих производные некоторых функций. Такие уравнения называются дифференциальными. Рассмотрим две задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

Задача 1. На плоскости xOy найти кривую, проходящую через точку $O(0;\ 0)$, у которой угловой коэффициент касательной, проведенной в любой точке кривой, равен удвоенной абсциссе точки касания.

Решение. Пусть $y=f(x)$ — уравнение искомой кривой. По условию задачи в каждой точке $M(x;\ f(x))$ есть касательная к этой кривой, угловой коэффициент которой, т. е. $f'(x)$, равняется $2x$. Таким образом, имеем:

$$y'=2x. \tag{1}$$

Это дифференциальное уравнение, так как оно содержит производную искомой функции. Из уравнения (1) следует, что функция y есть первообразная функции $2x$.

Следовательно,

$$y=\int 2x\,dx$$

или

$$y=x^2+C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная.

Из формулы (2) следует, что дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, т. е. уравнению (1) удовлетворяет не одна кривая, а бесконечное множество кривых — парабол (рис. 22). Чтобы из этого множества кривых выбрать нужную нам кривую, надо воспользоваться тем, что искомая кривая проходит через точку $O(0;\ 0)$. Следовательно, координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (2). Поэтому $0=0+C$, т. е. $C=0$. Значит, искомая кривая $y=x^2$.

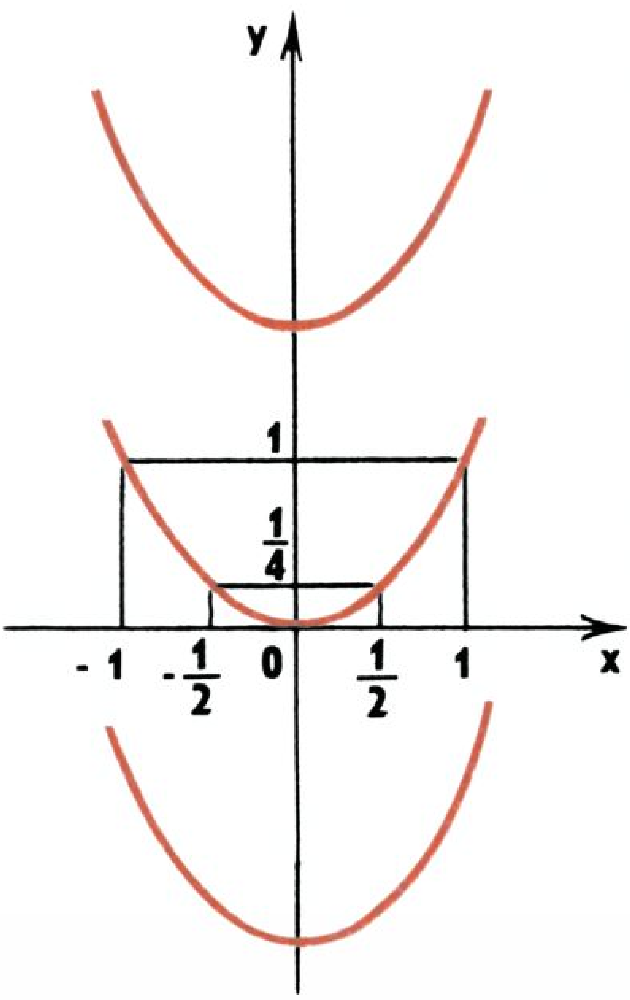

Рис. 22

Задача 2. Найти закон движения свободно падающего в пустоте тела, если пройденный путь начинает отсчитываться от момента времени $t=0$ и начальная скорость падения равна нулю. Скорость в этом случае выражается, как известно, формулой $v=gt$.

Решение. Как уже отмечалось, скорость прямолинейного движения есть производная пути по времени. Поэтому

$$v=s'=gt. \quad (3)$$

Из этого уравнения следует, что функция s есть первообразная функции gt. Следовательно,

$$s=\int gtdt$$

или

$$s=\frac{gt^2}{2}+C. \quad (4)$$

Для определения произвольной постоянной C используем то условие, что начало отсчета пути совпадает с началом отсчета времени, т. е. $s=0$ при $t=0$. Подставляя эти значения в равенство (4), находим $0=0+C$, т. е. $C=0$, и, следовательно, окончательно получаем

$$s=\frac{gt^2}{2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО РЕШЕНИЕ

В рассмотренных двух задачах мы приходим к дифференциальному уравнению вида $y'=\varphi(x)$. Это уравнение является простейшим дифференциальным уравнением. Однако в большинстве случаев естественные и другие процессы описываются гораздо общими и сложными дифференциальными уравнениями.

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y=f(x)$ и ее производные.

Всякая функция $y=f(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество, называется *решением* этого уравнения.

Например, функции $y=x^2$ и $s=\frac{gt^2}{2}$ являются решениями соответственно уравнений (1) и (3), так как функция $y=x^2$ обращает в тождество уравнение (1), а функция $s=\frac{gt^2}{2}$ — уравнение (3).

В функции (2) и (4), являющиеся также решениями соответственно уравнений (1) и (3), входит произвольная постоянная

C. Такие решения называются *общими решениями* этих уравнений. Таким образом, общее решение уравнения $y'=\varphi(x)$ имеет вид $y=f(x;\ C)$.

Решение, которое получается из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C, называется *частным решением*. Например, функции $y=x^2$, $s=\frac{gt^2}{2}$ — частные решения соответственно уравнений (1), (3).

Условие, что при $x=x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0, называется *начальным условием*. Начальное условие дает возможность выделить из общего решения частное решение.

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* данного *уравнения*. Например, уравнения $y'-y=0$, $y''+y=0$ имеют соответственно первый и второй порядок.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ФИЗИКЕ

РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД

Задача. Скорость распада радия в каждый момент времени прямо пропорциональна его наличной массе. Найти закон распада радия, если известно, что в начальный момент $t=0$ имелось m_0 г радия и период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен 1590 лет.

Решение. Пусть в момент времени t масса радия составляет x г. Тогда скорость распада радия равна

$$(m_0-x)'=-x'.$$

По условию задачи $-x'=kx$ или

$$x'=-kx, \tag{1}$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности. Отсюда

$$\frac{x'}{x}=-k \quad \text{или} \quad (\ln x)'=-k$$

и, значит,

$$\ln x=-k\int dt=-kt+C_1=-kt+\ln e^{C_1},$$

что дает $x=Ce^{-kt}$ $(C=e^{C_1})$, откуда

$$x=Ce^{-kt}. \tag{2}$$

Для определения C используем начальное условие: при $t=0$ $x=m_0$. Имеем: $C=m_0$ и, значит,

$$x=m_0e^{-kt}. \qquad (3)$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $x=\frac{m_0}{2}$ при $t=1590$. Имеем:

$$\frac{m_0}{2}=m_0e^{-1590k} \text{ или } e^{1590k}=2$$

и, следовательно, $e^k=2^{\frac{1}{1590}}$. Поэтому искомая функция

$$x=m_0 2^{-\frac{t}{1590}}.$$

ОХЛАЖДЕНИЕ ТЕЛ

Задача. Скорость охлаждения тела в воздухе прямо пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Температура воздуха равна 20 °С. Известно, что в течение 20 мин тело охлаждается от 100 до 60 °С. Определить закон изменения температуры θ тела в зависимости от времени t.

Решение. Согласно условию задачи $\theta'=-k(\theta-20)$ или

$$x'=-kx, \qquad (4)$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности и $x=\theta-20$.

Уравнение (4) есть уравнение вида (1) с начальным условием $x=80$ при $t=0$. Значит, согласно формуле (3)

$$x=80e^{-kt} \quad \text{или} \quad \theta-20=80e^{-kt},$$

откуда

$$\theta=20+80e^{-kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $\theta=60$ при $t=20$. Отсюда

$$60=20+80e^{-20k} \quad \text{или} \quad e^{-20k}=\frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$e^{-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Итак, искомая функция

$$\theta=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

ДВИЖЕНИЕ МОТОРНОЙ ЛОДКИ

Задача. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. На полном ходу ее мотор выключается, и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды прямо пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

Решение. На движущуюся лодку действует сила сопротивления воды

$$F = -kv,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности. С другой стороны, по второму закону Ньютона

$$F = ma$$

и, значит,

$$ma = -kv$$

или

$$v' = -\frac{k}{m} v.$$

Последнее уравнение есть уравнение вида (1) с начальным условием $v_0 = 20$ км/ч при $t = 0$. Поэтому согласно формуле (3)

$$v = 20e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Теперь, используя дополнительное условие: при $t = 40$ с $= \frac{1}{90}$ ч $v = 8$ км/ч,— получаем:

$$8=20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}} \quad \text{или} \quad e^{\frac{k}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{90}.$$

Следовательно,

$$v=20\left(\frac{5}{2}\right)^{-90t}.$$

Отсюда искомая скорость

$$v=20\left(\frac{5}{2}\right)^{-90\cdot\frac{1}{30}}=20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}=20\cdot\frac{8}{125}=\frac{32}{25}\approx 1{,}28 \text{ (км/ч)}.$$

ПОТЕРЯ ЗАРЯДА ПРОВОДНИКОМ

Задача. Изолированному проводнику сообщен заряд $Q_0=1000$ К. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент прямо пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени $t=10$ мин, если за первую минуту потеряно 100 К?

Решение. Пусть в момент времени t заряд проводника равен Q. Тогда скорость потери заряда в этот момент равна $-Q'$. По условию задачи

$$-Q'=kQ \quad \text{или} \quad Q'=-kQ,$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности. Последнее уравнение есть уравнение вида (1) с начальным условием $Q=Q_0$ при $t=0$. Значит, согласно формуле (3)

$$Q=Q_0e^{-kt}.$$

Далее, используя дополнительное условие: при $t=1$ мин $Q=$ $=900$ К,— имеем:

$$900=1000e^{-k}, \; e^{-k}=0{,}9.$$

Поэтому

$$Q=1000\ (0{,}9)^t.$$

Следовательно, через 10 мин на проводнике останется заряд

$$Q=1000\,(0{,}9)^{10}\approx 348{,}7 \text{ К}.$$

ЗАРЯД КОНДЕНСАТОРА

Задача. Конденсатор емкостью C включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Решение. Как уже отмечалось ранее, сила тока I есть производная от количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени t:

$$I = q'.$$

В момент t заряд конденсатора q и сила тока $I = q'$; в цепи действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\frac{q}{C}$, т. е.

$$E = U - \frac{q}{C}.$$

Согласно закону Ома

$$I = \frac{E}{R}.$$

Поэтому $q' = \frac{U - \frac{q}{C}}{R}$, откуда $q' = \frac{1}{CR}(UC - q)$ или

$$x' = -\frac{1}{CR}x \quad (x = UC - q),$$

т. е. имеем уравнение вида (1) с начальным условием $x = UC$ при $t = 0$. Значит, согласно формуле (3)

$$x = UCe^{-\frac{t}{CR}} \quad \text{или} \quad UC - q = UCe^{-\frac{t}{CR}},$$

откуда

$$q = UC\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right).$$

ПАДЕНИЕ С ПАРАШЮТОМ

При падении тел в безвоздушном пространстве их скорость равномерно увеличивается. Иначе обстоит дело, если падение происходит в воздухе. Будем для простоты считать, что сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости падения. Поэтому если масса тела равна m, то сила F, действующая на тело, равна $mg - kv$ (знак минус перед k поставлен потому, что сила сопротивления воздуха направлена в сторону, противоположную направлению падения). Далее, так как по второму закону Ньютона $F = ma$, где $a = v'$ — ускорение, то получаем уравнение

$$ma = mg - kv$$

или

$$v' = -\frac{k}{m}\left(v - \frac{mg}{k}\right)$$

с начальным условием $v=0$ при $t=0$. Отсюда, введя обозначение $x=v-\frac{mg}{k}$, получаем

$$x'=-\frac{k}{m}x$$

с начальным условием $x=-\frac{mg}{k}$ при $t=0$, т. е. имеем уравнение вида (1) с начальным условием $x=-\frac{mg}{k}$ при $t=0$. Значит, согласно формуле (3)

$$x=-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

или

$$v-\frac{mg}{k}=-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t},$$

откуда

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

По прошествии некоторого времени $e^{-\frac{k}{m}t}$ станет очень малым числом и скорость падения будет почти в точности равна $\frac{mg}{k}$, т. е. падение станет равномерным. Коэффициент k зависит от плотности воздуха, площади падающего тела и т. д. Например, при падении с парашютом этот коэффициент довольно велик и потому скорость приземления парашютиста сравнительно невелика — примерно 5 м/с. Ясно, что скорость падения пушинки будет меньше, чем скорость падения свинцового шарика, имеюще-

го ту же массу,— у пушинки гораздо больше площадь и потому больше значение k. Именно поэтому пушинка так медленно опускается вниз и так легко увлекается восходящим потоком воздуха. Аристотель в своих рассуждениях о падении тел не учел сопротивления воздуха и считал, что тяжелые тела падают во столько раз быстрее легких, во сколько раз они тяжелее их. Галилей экспериментально опроверг это утверждение, бросая шары с наклонной Пизанской башни.

Теперь найдем закон движения парашютиста $s=s(t)$. Для этого перепишем найденное выражение для скорости v в виде

$$s'=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Из последнего равенства следует, что функция s есть первообразная для функции $\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$. Следовательно,

$$s=\int\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt$$

или

$$s=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)+C,$$

где C — произвольная постоянная. Для отыскания C заметим, что при $t=0$ пройденный путь равен нулю, т. е. при $t=0$ имеем $s=0$. Подставляя эти значения в последнее равенство, получим

$$0=\frac{m^2g}{k^2}+C, \text{ т. е. } C=-\frac{m^2g}{k^2}.$$

Итак, закон движения парашютиста имеет вид:

$$s=\frac{mg}{k}\left(t-\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right).$$

РАВНОМЕРНО УСКОРЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Задача 1. Точка движется по оси Ox равномерно ускоренно с ускорением, равным a. Найти закон ее движения.

Решение. Пусть искомый закон движения определяется функцией $x=x(t)$. По условию имеем

$$x''=a \text{ или } (x')'=a.$$

Из последнего уравнения следует, что x' есть первообразная для a. Значит,

$$x'=\int a\,dt=at+C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Искомая же функция x есть первообразная для функции $x'=at+C_1$. Поэтому

$$x=\int(at+C_1)\,dt=\frac{at^2}{2}+C_1t+C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Функция

$$x=\frac{at^2}{2}+C_1t+C_2 \qquad (5)$$

называется *общим решением* дифференциального уравнения второго порядка $x''=a$ (в общее решение уравнения второго порядка входят две произвольные постоянные).

Таким образом, имеется бесконечно много законов движения, решающих поставленную задачу — каждой паре чисел C_1 и C_2 соответствует свой конкретный закон. Чтобы найти закон, соответствующий данному движению, надо, например, знать, где находилась точка в некоторый момент времени t_0 и какова была скорость v_0 ее в этот момент (эти условия называются *начальными условиями*).

Задача 2. Из винтовки выстрелили вверх. Найти закон движения пули, считая, что ускорение земного притяжения 10 м/с^2, скорость вылета пули из винтовки 800 м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Ось Ox направим вертикально вверх, ее начало считаем точкой вылета пули, за единицу длины примем 1 м. Ускорение силы тяжести направлено вниз вместе с силой тяжести. Поэтому в наших расчетах надо считать ускорение равным отрицательному числу -10. На основании формулы (5) закон движения выражается формулой

$$x=-5t^2+C_1t+C_2.$$

Так как пуля в момент $t=0$ имела координату $x=0$, то $0=0+0+C_2$ или $C_2=0$, поэтому

$$x=-5t^2+C_1t.$$

Чтобы определить C_1, возьмем производную от последней функции. Получим

$$x'=-10t+C_1.$$

Отсюда, учитывая, что при $t=0$ производная равна скорости вылета пули 800 м/с, найдем $C_1=800$, и закон движения пули имеет вид

$$x=-5t^2+800t.$$

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Пусть на идеально гладком столе лежит шарик массой m, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости $\lambda > 0$ (рис. 23). Направим ось Ox вдоль пружины, а за начало координат примем ту точку, в которой шарик находится в положении равновесия (пружина не растянута). Отведем теперь шарик от положения равновесия на расстояние x_0 и отпустим его. Тогда со стороны пружины на шарик будет действовать сила F, стремящаяся вернуть его в положение равновесия. Из физики известно, что эта сила равна (для малых x)

$$F(x) = -\lambda x \tag{6}$$

(знак минус поставлен потому, что направление действующей силы противоположно направлению смещения x). Запишем второй закон Ньютона для шарика

$$F = ma, \tag{7}$$

где ускорение $a = x''$. Из равенств (6) и (7) имеем $ma = -\lambda x$ или

$$x'' = -\frac{\lambda}{m} x. \tag{8}$$

Говорят, что физическая величина, изменяющаяся во времени в соответствии с уравнением (8), совершает гармонические колебания. Само уравнение (8) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний.*

Пусть $\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$. Функция

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \tag{9}$$

при любых значениях постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению (8), в чем можно убедиться путем прямой проверки. Эта функция называется *общим решением уравнения* (8).

По условию задачи $x = x_0$ в момент времени $t = 0$, а скорость центра шарика равна нулю. Значит,

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из выражения (9) следует, что

$$x' = -C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t.$$

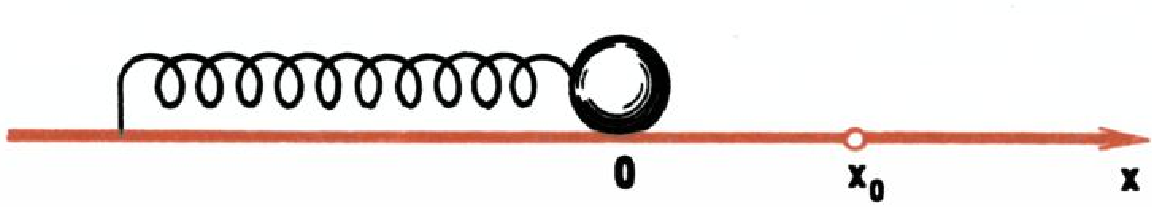

Рис. 23

Поэтому систему (10) перепишем в виде

$$\begin{cases} C_1 + 0 = x_0 \\ 0 + C_2\omega = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$ и

$$x = x_0 \cos \omega t. \tag{11}$$

Другими словами, центр шарика будет совершать гармонические колебания с амплитудой $|x_0|$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Как говорят в физике, мы имеем здесь *гармонический осциллятор*.

В действительности мы знаем, что шарик не может колебаться бесконечно долго и амплитуда колебаний стремится к нулю. Это происходит потому, что в любом реальном опыте присутствует сила трения, которой мы пренебрегаем при выводе уравнения (8). Однако если сила трения мала, а промежуток времени не слишком большой, то (8) и (11) описывают процесс с хорошим приближением.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ХИМИИ

ЗАКОН ПЕРЕХОДА ВЕЩЕСТВА В РАСТВОР

Рассмотрим процесс перехода вещества в раствор. Известно, что при фиксированной температуре количество вещества, содержащееся в определенном объеме растворителя, не может превзойти некоторого, определенного для каждого вещества, числа P, соответствующего насыщенному раствору. Известно также, что по мере приближения к насыщенному раствору уменьшается количество вещества, переходящего в раствор за единицу времени. Иными словами, чем больше вещества перешло в раствор, тем меньше скорость перехода.

Пусть $x = x(t)$ — количество вещества, перешедшего в раствор к моменту времени t. Тогда x' — скорость перехода, и в соответствии со сказанным можно написать:

$$x' = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ стремится к нулю при $x \to P$ $(x < P)$.

Эксперименты показывают, что для многих веществ функция $\Phi(x)$ прямо пропорциональна разности $P - x$, т. е. $\Phi(x) = k(P - x)$, и, следовательно, $x' = k(P - x)$ или

$$\theta' = -k\theta, \tag{1}$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности и $\theta = P - x$.

Уравнение (1) есть уравнение вида (1) из пункта «Радиоактивный распад». Значит, согласно формуле (2) из того же пункта

$$\theta = Ce^{-kt} \text{ или } P - x = Ce^{-kt},$$

откуда

$$x = P - Ce^{-kt}.$$

Пусть t_0 — момент времени, с которого начался процесс перехода вещества в раствор. Очевидно, что $x(t_0) = 0$. Поэтому $P - Ce^{-kt_0} = 0$, откуда $C = Pe^{kt_0}$ и, значит,

$$x = P\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right). \qquad (2)$$

Значения k и P определяются характером растворяемого вещества и растворителя. Из (2) видно, что при любых $k > 0$ и P величина $x(t)$ стремится к P, если $t \to \infty$. Вид функции $x(t)$ хорошо согласуется с экспериментальными данными. Поэтому формулу (2) можно рассматривать как закон перехода вещества в раствор.

КОНЦЕНТРАЦИЯ РАСТВОРА

Задача. В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси (рис. 24). Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

Решение. Пусть x — количество соли в резервуаре в момент времени t. Объем смеси в резервуаре в момент времени t, очевидно, равен

$$V = 100 + 30t - 20t = 100 + 10t,$$

поэтому концентрация соли (т. е. количество соли, содержащейся в одном литре смеси) в момент времени t будет равна $\frac{x}{100+10t}$. Отсюда имеем дифференциальное уравнение

$$-x' = \frac{20x}{100+10t},$$

(знак минус обусловлен тем, что x — убывающая функция) или

$$\frac{x'}{x} = -\frac{2}{10+t},$$

или, что то же,

$$(\ln x)' = -\frac{2}{10+t},$$

и, значит, $\ln x = -2\int \frac{dt}{10+t}$, т. е.

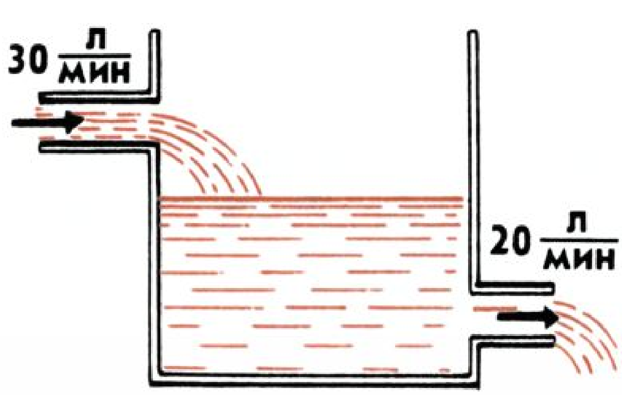

Рис. 24

$$\ln x = -2\ln(10+t) + \ln e^{C_1},$$

откуда

$$x = \frac{C}{(10+t)^2} \qquad (C = e^{C_1}).$$

При $t=0$ $x=10$. Поэтому $C=1000$. Итак, закон изменения количества соли в кг, находящейся в резервуаре, в зависимости от прошедшего времени t в минутах дается формулой

$$x = \frac{1000}{(10+t)^2}. \qquad (3)$$

Заметим, что из формулы (3), зная количество соли, оставшейся в резервуаре (последнее легко установить, измеряя объем резервуара и концентрацию соли в нем), можно определить, сколько времени прошло от начала процесса. На этой идее основано вычисление возраста морей и океанов.

ХИМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ

Порядок химической реакции равен общему числу молекул, входящих в левую часть химического уравнения. Так, $RaB \to RaC$ есть реакция первого порядка. Скорость реакции есть скорость v, с которой система компонентов левой части превращается в систему компонентов правой части уравнения реакции. Действующая масса или концентрация реагирующего вещества A есть количество молей* этого вещества в единице объ-

* Моль, или грамм-молекула вещества,— число граммов этого вещества, равное его молекулярному весу. Например, 1 моль кислорода равен 16 г, 1 моль воды — 18 г.

ема. Согласно закону действующих масс скорость реакции прямо пропорциональна действующим массам в данный момент.

ХИМИЧЕСКИЕ РЕАКЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Если a — начальная концентрация вещества A, x — количество молей на 1 л, прореагировавших за время t от начала реакции, то скорость реакции x', а действующая масса к этому моменту $a-x$. Согласно закону действующих масс $x'=k(a-x)$ или

$$\theta' = -k\theta, \tag{4}$$

где $k>0$ — коэффициент пропорциональности (константа скорости), зависящий от рода и условий химического процесса, и $\theta=a-x$. Значит, $\theta=a$ при $t=0$ — начальное условие для уравнения (4).

Уравнение (4) есть уравнение вида (1) из пункта «Радиоактивный распад». Следовательно, согласно формуле (3) того же пункта

$$\theta = ae^{-kt} \text{ или } a-x=ae^{-kt},$$

откуда

$$x=a(1-e^{-kt}). \tag{5}$$

Задача 1. Радиоактивный элемент RaB распадается наполовину, образуя радиоактивный элемент RaC, в течение 26,7 мин. Найти время распада 0,2 первоначального количества RaB.

Решение. Здесь имеет место реакция первого порядка $\mathrm{RaB} \longrightarrow \mathrm{RaC}$. Поэтому согласно предыдущему дифференциальное уравнение реакции

$$x'=k(a-x)$$

и, значит, x определяется формулой (5). Из формулы (5) имеем

$$e^{-kt}=\frac{a-x}{a} \text{ или } e^{kt}=\frac{a}{a-x}$$

и, следовательно, $\ln\frac{a}{a-x}=kt$, откуда

$$t=\frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-x}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $x=\frac{a}{2}$ при $t=26{,}7$. Имеем:

$$26{,}7=\frac{1}{k}\ln\frac{a}{a-\frac{a}{2}}=\frac{1}{k}\ln 2$$

или $k=\frac{\ln 2}{26{,}7}$. Теперь искомое время

$$t=\frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{a}{a-0{,}2a}=\frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{1}{0{,}8}=\frac{26{,}7}{\ln 2}\ln\frac{5}{4}\approx 8{,}6\ (\text{мин}).$$

Задача 2. Вещество A превращается в вещество B. Спустя 1 ч после начала реакции осталось 44,8 г вещества A, а после 3 ч осталось 11,2 г вещества. Определить первоначальное количество a вещества A и время, когда останется половина этого вещества.

Решение. Здесь имеет место реакция первого порядка. Поэтому дифференциальное уравнение реакции

$$x'=k(a-x)$$

и, значит, как установлено выше,

$$x=a(1-e^{-kt}).$$

Используя дополнительные условия ($x=a-44{,}8$ при $t=1$, $x=a-11{,}2$ при $t=3$), имеем:

$$a-44{,}8=a(1-e^{-k}),$$
$$a-11{,}2=a(1-e^{-3k})$$

или

$$\begin{cases}44{,}8=ae^{-k},\\ 11{,}2=ae^{-3k}.\end{cases}$$

Из последней системы находим $e^{-k}=2^{-1}$, $a=89{,}6$. Теперь находим искомое время. Имеем:

$$\frac{a}{2}=a(1-2^{-t}),$$

откуда

$$\frac{1}{2}=2^{-t}\ \text{или}\ 2^{-1}=2^{-t}$$

и, следовательно, $t=1$.

Примечание. Подобным образом рассматриваются реакции второго и более высокого порядка.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БИОЛОГИИ

УВЕЛИЧЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ФЕРМЕНТА

Задача. В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента прямо пропорциональна наличному его количеству x. Первоначальное количество фермента a в течение 1 ч удвоилось. Во сколько раз оно увеличится через 3 ч?

Решение. По условию задачи имеем дифференциальное уравнение

$$x' = kx \tag{1}$$

($k > 0$ — коэффициент пропорциональности) с начальным условием $x = a$ при $t = 0$. Как и при решении уравнения (1) из пункта «Радиоактивный распад», получим сначала формулу

$$x = Ce^{kt}, \tag{2}$$

откуда, используя начальное условие, найдем

$$x = ae^{kt}. \tag{3}$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $x = 2a$ при $t = 1$. Имеем $2a = ae^k$ или $e^k = 2$. Поэтому

$$x = a2^t,$$

откуда $x = 8a$ при $t = 3$. Следовательно, количество фермента через 3 ч увеличится в 8 раз.

ИЗОЛИРОВАННАЯ КОЛОНИЯ ОРГАНИЗМОВ

Рассмотрим колонию микроорганизмов, обитающую в условиях неограниченных ресурсов питания. Предположим, что колония не подавляется никаким другим видом. В силу размножения и смертности число живых организмов в этой колонии будет меняться с течением времени. Найдем закон этого изменения. Пусть $x = x(t)$ обозначает число живых организмов в момент t, а $x(t + \Delta t)$ — в момент $t + \Delta t$. Тогда разность

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \Delta x$$

дает приращение функции x за промежуток времени от t до $t + \Delta t$.

Из чего складывается это приращение? За время Δt все взрослые особи или часть их произведут потомство; часть особей может погибнуть. Таким образом,

$$\Delta x = G - H,$$

где G — число родившихся за время от t до $t + \Delta t$, а H — число погибших за это время.

Число родившихся G зависит от длины промежутка Δt (чем больше Δt, тем больше G) и от количества «родителей» (чем больше взрослых особей, тем больше потомство). Таким образом,

$$G = \Phi(x, \Delta t),$$

где функция $\Phi(x, \Delta t)$ растет с ростом x или Δt и равна нулю, если равна нулю одна из этих переменных.

Что касается переменной Δt, то самые простые эксперименты показывают, что она должна входить линейно: если промежуточные наблюдения увеличить, например, в два раза, то и прирост потомства микроорганизмов увеличится в два раза. Таким образом,

$$\Phi(x, \Delta t) = f(x)\Delta t.$$

Вопрос о характере функции $f(x)$ сложнее. Пока мы знаем только, что она монотонно возрастает с ростом x и равна нулю при $x=0$. Но каков этот рост? Он существенно зависит от биологических особенностей исследуемого вида, и для его описания могут понадобиться те или иные положительные степени x, рациональная функция и т. п. Ограничимся простейшим случаем, когда численность потомства прямо пропорциональна количеству «родителей» $f(x) = \alpha x$, $\alpha = \text{const}$. Этот случай реализуется, например, при делении клеток.

Итак,

$$G = \alpha x \Delta t.$$

По аналогии

$$H = \beta x \Delta t$$

и, следовательно,

$$\Delta x = \alpha x \Delta t - \beta x \Delta t$$

или

$$\Delta x = \gamma x \Delta t, \tag{4}$$

где $\gamma = \alpha - \beta$.

Разделим обе части равенства (4) на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В результате получим

$$x' = \gamma x, \tag{5}$$

т. е. уравнение вида (1). Значит, согласно формуле (2) имеем

$$x = Ce^{\gamma t}. \tag{6}$$

Начальное условие: $x = x_0$ при $t = t_0$, где t_0 — время начала наблюдения за колонией, $x(t_0) = x_0$ — количество живых организмов в колонии в начальный момент. Используя начальное условие, из (6) имеем

$$C = x_0 e^{-\gamma t_0}.$$

Подставляя это в (6), получаем искомый закон изменения числа организмов с течением времени:

$$x = x_0 e^{\gamma(t - t_0)}. \tag{7}$$

Однако найденный закон носит пока предположительный характер. Вопрос о том, насколько эта модель соответствует реальности, решает экспериментальная проверка. Из формулы

(7) следует, что с ростом t численность поголовья растет неограниченно как экспонента. Однако ни в одной реально существующей популяции такой рост не наблюдается. Это и понятно. Те предположения, на основе которых мы вывели уравнение (5) (неограниченность ресурсов питания, отсутствие влияния других видов и т. п.), в реальных природных условиях не выполняются. Таким образом, уравнение (5) имеет смысл либо в теоретическом аспекте (оно показывает, как развивалась бы популяция, если бы ей не мешали и неограниченно ее подкармливали, либо описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой популяции, например популяции грибков, выделяющих пенициллин, о чем уже говорилось ранее).

Уравнение (5) впервые в 1802 г. получил Мальтус. Заблуждение Мальтуса заключалось в том, что это уравнение, справедливое для очень узкого класса популяций, он считал универсальным законом не только для всей природы, но и для человеческого общества.

Задача. Скорость размножения бактерий прямо пропорциональна их количеству. В начальный момент $t=0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 ч?

Решение. Пусть x — количество бактерий, имеющихся в данный момент. Тогда согласно условию задачи получим уравнение

$$x'=kx$$

($k>0$ — коэффициент пропорциональности) с начальным условием $x=100$ при $t=0$. Это уравнение вида (1). Значит, согласно формуле (3) имеем

$$x=100e^{kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $x=200$ при $t=3$. Имеем

$$200=100e^{3k} \text{ или } 2=e^{3k}$$

и, следовательно, $e^k=2^{\frac{1}{3}}$.

Поэтому искомая функция

$$x=100\cdot 2^{\frac{t}{3}},$$

откуда $x=800$ при $t=9$.

Следовательно, в течение 9 ч количество бактерий увеличится в 8 раз.

ДИНАМИКА ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ

Динамика численности популяции, т. е. изменение общего количества живых особей в популяции в связи с рождаемостью и смертностью,— один из важнейших вопросов экологии популяций. В предыдущем пункте был рассмотрен простейший случай из этой области.

Более точное описание развития популяции дает уравнение Ферхюльста — Перла, полученное в 1845 г. Оно учитывает так называемый «фактор самоотравления» популяции, или внутривидовую борьбу в популяциях. Этот фактор, снижающий скорость роста популяции, объясняется многими причинами: конкурентной борьбой за место и пищу, распространением инфекций из-за тесноты и т. п. Желая учесть этот эффект, мы должны при подсчете прироста Δx (см. предыдущий пункт) из величины $\gamma x \Delta t$ вычесть некоторую величину $h(x, \Delta t)$:

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - h(x, \Delta t).$$

Функция $h(x, \Delta t)$ для многих популяций может быть взята в виде произведения

$$h(x, \Delta t) = \delta x^2 \Delta t,$$

где δ — коэффициент самоотравления (или внутренней борьбы в популяции).

Линейная зависимость по Δt объясняется так же, как и в первом слагаемом. А вид функции x^2 обосновывается следующим образом. Величина $h(x, \Delta t)$ отражает снижение скорости роста популяции из-за внутривидовой конкуренции. Но конкуренция тем выше, чем больше количество встреч между особями, а количество встреч прямо пропорционально произведению xx, т. е. x^2. Здесь в порядке сравнения следует заметить, что количество встреч между особями двух разных видов прямо пропорционально как численности одного, так и численности другого, т. е. прямо пропорционально произведению xy, где x и y — соответствующие численности видов. При встречах особей одного вида место y занимает x, и мы получаем x^2. Итак,

$$\Delta x = \gamma x \Delta t - \delta x^2 \Delta t. \qquad (8)$$

Равенство (8) делим почленно на Δt:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma x - \delta x^2$$

и после перехода к пределу при $\Delta t \to 0$ получим дифференциальное уравнение

$$x' = \gamma x - \delta x^2. \qquad (9)$$

Это и есть *уравнение Ферхюльста — Перла.*

Уравнение (9) часто записывают в ином виде. Вынеся за скобки γx в правой части уравнения (9), получим $x' = \gamma x\left(1-\frac{\delta}{\gamma}x\right)$ или

$$x' = \gamma x \frac{\frac{\gamma}{\delta} - x}{\frac{\gamma}{\delta}}. \tag{10}$$

Введя обозначение $\frac{\gamma}{\delta} = \mu$, уравнение (10) перепишется в виде

$$x' = \gamma x \frac{\mu - x}{\mu}, \tag{11}$$

или $\frac{\mu x'}{x(\mu - x)} = \gamma$, или, что то же, $\frac{(\mu - x) + x}{x(\mu - x)}x' = \gamma$, откуда

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\mu - x}\right)x' = \gamma$$

или, считая для всех моментов времени $t > t_0$ $x(t) < \mu$,

$$(\ln x - \ln(\mu - x))' = \gamma$$

и, значит,

$$\ln \frac{x}{\mu - x} = \gamma t + \ln e^{C_1},$$

что дает

$$\frac{x}{\mu - x} = Ce^{\gamma t}. \tag{12}$$

Пусть для простоты $t_0 = 0$ и $x(0) = x_0 < \mu$. Подставляя в (12) эти начальные данные, найдем $C = \frac{x_0}{\mu - x_0}$.

Подставив это значение C в (12), получим

$$\frac{x}{\mu - x} = \frac{x_0}{\mu - x_0}e^{\gamma t}.$$

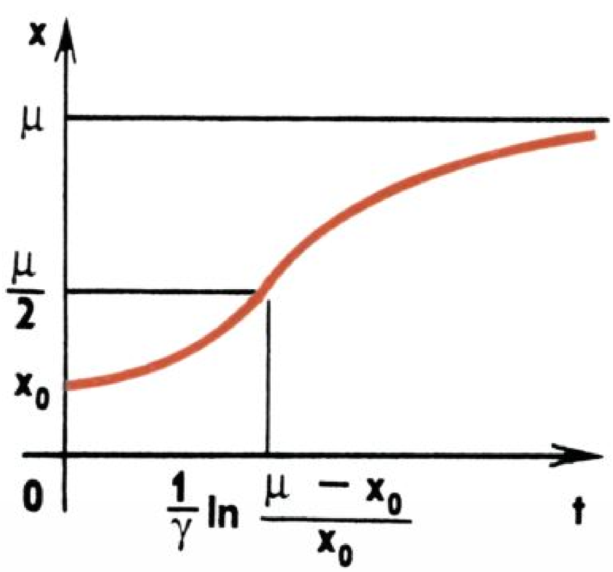

Рис. 25

Отсюда искомый закон (модель Ферхюльста — Перла):

$$x = \frac{x_0 \mu}{x_0 + (\mu - x_0)e^{-\gamma t}}. \tag{13}$$

На рисунке 25 показан схематически график этого закона. Он напоминает вытянутую букву S. Поэтому его называют S-образной кривой (иногда логистической кривой). Для многих популяций эта кривая хорошо совпадает с экспериментальными данными.

Из формулы (13) следует, что при $t \to +\infty$ кривая (13) стремится к прямой $x=\mu$, никогда не достигая этой прямой. Поэтому величину μ называют максимальной численностью популяции, теоретически возможной в данных условиях.

МОДЕЛЬ СЕЗОННОГО РОСТА

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$x' = rx(t)\cos t,$$

где r — положительная постоянная, можно рассматривать как простую модель сезонного роста. Скорость роста x' популяции $x=x(t)$ становится попеременно то положительной, то отрицательной, и популяция то возрастает, то убывает. Это может вызываться таким сезонным фактором, как доступность пищи. Переписав данное уравнение в виде $\frac{x'}{x} = r\cos t$, имеем $(\ln x)' = r\cos t$ и, значит,

$$\ln x = \int r\cos t\,dt = r\sin t + \ln e^{C_1},$$

что дает

$$x = Ce^{r\sin t}\ (C=e^{C_1}).$$

Полагая $t=0$, получим $C=x(0)$, т. е. размер популяции в момент t есть $x=x(0)e^{r\sin t}$. Максимальный размер популяции, равный $e^r x(0)$, достигается при t, равном $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$, когда $\sin t = 1$. Минимальный размер, равный $e^{-r}x(0)$, достигается при t, равном $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$, когда $\sin t = -1$.

В этой модели размер популяции колеблется от $e^r x(0)$ до $e^{-r}x(0)$ с периодом 2π. Моменты времени $t=0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ можно считать серединами сезонов наибольшей доступности пищи летних сезонов, а моменты $t=\pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ соответствуют серединам сезонов наибольшей нехватки пищи (зимних сезонов). Продолжительность одного года соответствует 2π ед. времени. Это показано на рисунке 26.

Остановимся теперь еще на 3 математических моделях из биологии: внутривенное питание глюкозой, теория эпидемии и рост листьев растений.

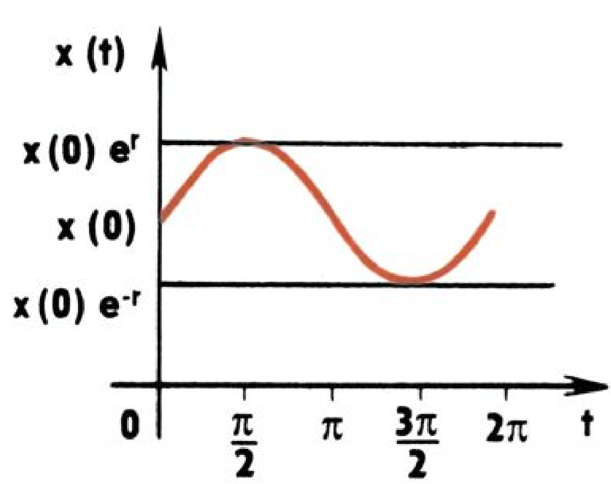

Рис. 26

ВНУТРИВЕННОЕ ПИТАНИЕ ГЛЮКОЗОЙ

Вливание глюкозы в кровеносную систему является важной лечебной процедурой. Для изучения этого процесса определим $\tau=\tau(t)$ как количество глюкозы в крови пациента в момент времени t. Допустим, что глюкоза вводится в кровь с постоянной скоростью c (г/мин). В то же время глюкоза разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, прямо пропорциональной имеющемуся количеству глюкозы.

Пусть c_1 — скорость удаления глюкозы из кровеносной системы и $\tau(0)$ — начальное количество глюкозы в крови пациента. Имеем

$$\tau=\tau(0)+ct-c_1t,$$

отсюда $\tau'=c-c_1$.
Но в силу условия задачи $c_1=k\tau$, где k — положительная постоянная. Таким образом, имеем уравнение

$$\tau'=c-k\tau,$$

откуда

$$\tau'=k\left(\frac{c}{k}-\tau\right)$$

или, введя обозначение $x=\frac{c}{k}-\tau$,

$$x'=-kx,$$

т. е. имеем уравнение вида (1) из пункта «Радиоактивный распад» с начальным условием $x(0)=\frac{c}{k}-\tau(0)$. Значит, согласно формуле (3) из того же пункта $x=x(0)e^{-kt}$ или

$$\frac{c}{k}-\tau=\left(\frac{c}{k}-\tau(0)\right)e^{-kt},$$

откуда

$$\tau=\frac{c}{k}+\left(\tau(0)-\frac{c}{k}\right)e^{-kt}.$$

Из последней формулы видно, что с увеличением времени величина τ приближается к пределу, равному $\frac{c}{k}$. Это есть равновесное количество глюкозы в крови.

ТЕОРИЯ ЭПИДЕМИЙ

Ниже мы ограничимся лишь рассмотрением эпидемий простейшего вида. Предположим, что изучаемое заболевание носит длительный характер, так что процесс передачи инфекции — значительно более быстрый, чем течение самой болезни. Нас будет интересовать именно первый процесс — процесс передачи инфекции. При этом будем предполагать, что зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным.

Пусть a и n — соответственно число зараженных и незараженных в начальный момент, $x=x(t)$ — число незараженных в момент t, а $y=y(t)$ — число зараженных к моменту t. Для всех моментов времени из некоторого не слишком большого отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$* имеет место равенство

$$x+y=n+a. \tag{14}$$

Так как инфекция передается при встречах зараженных с незараженными, то число незараженных будет убывать с течением времени прямо пропорционально количеству встреч между теми и другими, т. е. прямо пропорционально произведению xy. Поэтому скорость убывания числа незараженных равна

$$x' = -\beta xy, \tag{15}$$

где $\beta > 0$ — коэффициент пропорциональности. Подставив в равенство (15) выражение x из (14), получим

$$y' = \beta y(n+a-y) \tag{16}$$

или

$$y' = \beta(n+a)\, y \frac{n+a-y}{n+a},$$

т. е. уравнение вида (11) с начальным условием $y(0)=a$. Значит, согласно формуле (13) имеем

$$y = \frac{a(n+a)}{a+(n+a-a)\, e^{-\beta(n+a)t}}$$

или

$$y = \frac{a(n+a)}{a+ne^{-\beta(n+a)t}}. \tag{17}$$

Формула (17) дает закон возрастания $y(t)$ с течением времени.

---

* Точнее, отрезок [0; T] должен быть меньше времени жизни одного поколения. Тогда в наших уравнениях мы можем не учитывать естественную смертность особей.

РОСТ ЛИСТЬЕВ РАСТЕНИЯ

Скорость увеличения площади молодого листа викториирегии, имеющего форму круга, прямо пропорциональна длине окружности листа и количеству солнечного света, падающего на него. Последнее прямо пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью к листу. Найти зависимость между площадью S листа и временем t, если в 6 ч утра эта площадь равнялась 1600 см^2, а в 18 ч того же дня — 2500 см^2.

Принять, что угол между направлением луча Солнца и вертикалью в 6 ч утра и в 18 ч (без учета знака) равен 90°, а в полдень — 0°.

Пусть t — время, отсчитываемое от полуночи. Если S — переменная площадь листа, то скорость роста площади листа

$$S' = k_1 2\pi r Q,$$

где $2\pi r$ — длина окружности листа, Q — количество солнечного света, k_1 — коэффициент пропорциональности.

Площадь листа $S = \pi r^2$, откуда $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Тогда

$$S' = k_1 \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{S}\, Q. \tag{18}$$

По условию

$$Q = k_2 S \cos \alpha, \tag{19}$$

где α — угол между направлением лучей и вертикалью, k_2 — коэффициент пропорциональности. Угол α является линейной возрастающей функцией аргумента t: $\alpha = k_3 t + b$, где параметры k_3 и b найдем из дополнительных условий: $\alpha = 0$ при $t = 12$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ при $t = 18$. Получим $k_3 = \frac{\pi}{12}$, $b = -\pi$ и, значит, $\alpha = \frac{\pi}{12}(t - 12)$. Тем самым с учетом (18) и (19) имеем

$$\frac{S'}{S\sqrt{S}} = k \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right) \quad (k = k_1 k_2)$$

или

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{S}}\right) = k \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right)$$

и, значит,

$$-\frac{2}{\sqrt{S}} = k \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}} \int \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right) dt$$

или

$$-\frac{2}{\sqrt{S}}=\frac{24k}{\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right)+C, \qquad (20)$$

откуда начальные условия $S=1600$ при $t=6$ и $S=2500$ при $t=18$ дают

$$C=-\frac{9}{200},\ k=\frac{\sqrt{\pi}}{24\cdot 200}.$$

Подставляя эти значения в (20), получаем

$$-\frac{2}{\sqrt{S}}=\frac{24\sqrt{\pi}}{24\cdot 200\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right)-\frac{9}{200},$$

откуда

$$S=\frac{160\,000}{\left(9-\sin\left(\frac{\pi}{12}(t-12)\right)\right)^2}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

НЕПРЕРЫВНЫЙ РОСТ НАСЕЛЕНИЯ ИЛИ ЕГО УБЫВАНИЕ

Пусть скорость прироста (или убывания) некоторой величины зависит от ее наличного количества A в данный момент t. В начальный момент $t=0$ эта величина равна A_0. Найти зависимость величины A от времени t.

Для построения математической модели простейшего типа роста населения принимаем, что скорость изменения количества населения прямо пропорциональна этому количеству. Скорость прироста населения выражается производной A'. Если $k>0$ — коэффициент пропорциональности, то в случае прироста населения

$$A'=kA \qquad (1)$$

и в случае его убывания

$$A'=-kA. \qquad (2)$$

Рис. 27

Уравнение (1) имеет вид уравнения (1) из пункта «Увеличение количества фермента» с начальным условием $A=A_0$ при $t=0$. Следовательно, согласно формуле (3) из того же пункта $A=A_0e^{kt}$.

Уравнение же (2) имеет вид уравнения (1) из пункта «Радиоактивный распад», и, значит, согласно формуле (3) из последнего пункта $A = A_0 e^{-kt}$.

Итак, в случае роста населения естественный прирост

$$A = A_0 e^{kt} \tag{3}$$

и в случае его убывания (естественная смертность)

$$A = A_0 e^{-kt}. \tag{4}$$

Схематически это представлено на рисунке 27.

РЕГУЛИРУЕМЫЙ РОСТ НАСЕЛЕНИЯ

Предположим, что количество населения A увеличивается с искусственно уменьшаемой скоростью.

Будем считать, что обстоятельства, препятствующие росту количества A, не превышают значения M. Кроме того, предположим, что скорость роста количества A прямо пропорциональна произведению A и разности $M - A$. Когда прирост мал, то скорость роста замедляется.

По предположению

$$A' = kA(M - A) \tag{5}$$

или

$$A' = kMA \frac{M - A}{M}, \tag{6}$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности.

Уравнение (6) есть уравнение вида (11) из пункта «Динамика численности популяции». Если при этом A_0 — количество населения в начальный момент $t = 0$, то согласно формуле (13) из того же пункта имеем

$$A = \frac{MA_0}{A_0 + (M - A_0)\, e^{-kMt}}. \tag{7}$$

Уравнение (7) дает зависимость роста количества населения при обстоятельствах, препятствующих ему: регулируемое размножение, возможные эпидемии и другие факторы. Оно называется *логистическим уравнением*. Схематический вид графика функции (7) тот же, что на рисунке 25.

КОЛИЧЕСТВО НАСЕЛЕНИЯ НА ОПРЕДЕЛЕННУЮ ДАТУ

Задача 1. Население Земли в 1970 г. составляло 3600 млн человек, а годовой прирост равнялся 60 млн человек. Найти предположительное количество населения в 2000 г.

Решение. Определим коэффициент k естественного прироста:

$$k=\frac{60\cdot 10^6}{3600\cdot 10^6}\approx 0{,}017,$$

т. е. 1,7%.

Тогда через $t=30$ лет согласно формуле (3) имеем

$$A=3600\cdot 10^6 e^{0{,}017\cdot 30}=3600\cdot 10^6 e^{0{,}51},$$

откуда

$$A\approx 6\cdot 10^9 \text{ человек.}$$

Задача 2. Предположим, что скорость прироста населения прямо пропорциональна количеству населения. Найти зависимость между численностью населения A и временем t, если известно, что в некоторый момент, принимаемый за начальный, количество населения равнялось A_0, а через год оно увеличилось на $a\%$. Вычислить предполагаемое на этой основе количество населения города Москвы (без пригородов) на 15 января 2000 г., если 15 января 1970 г. оно составляло 6,942 млн человек. Годовой прирост составил 1,25%.

Решение. Как уже отмечалось, скорость роста численности населения есть производная от количества населения A по времени t, т. е. A'. В соответствии с условием задачи имеем уравнение

$$A'=kA$$

($k>0$ — коэффициент пропорциональности) с начальным условием $A=A_0$ при $t=0$. Значит (см. формулу (3)),

$$A=A_0e^{kt}.$$

Для вычисления множителя e^k используем дополнительное условие: $A=A_0+A_0\cdot a\%$ при $t=1$, т. е. имеем

$$\frac{A_0(100+a)}{100}=A_0e^k,$$

откуда

$$e^k=\frac{100+a}{100}=1+\frac{a}{100}$$

и, значит,

$$A=A_0\left(1+\frac{a}{100}\right)^t. \qquad (8)$$

Формула (8) и выражает искомую зависимость между численностью населения и временем.

Пользуясь формулой (8), вычислим количество населения Москвы на 15 января 2000 г.:

$$A_{2000}=6{,}942\cdot\left(1+\frac{1{,}25}{100}\right)^{30}=6{,}942\cdot(1+0{,}0125)^{30}\approx$$

$$\approx 6{,}942\cdot(1+30\cdot 0{,}0125)=6{,}942\cdot 1{,}375\approx 9{,}545 \text{ (млн. человек).}$$

ДИНАМИКА РОСТА НАСЕЛЕНИЯ ПО ВРЕМЕНИ

Задача. Население города Минска 15 января 1970 г. насчитывало 0,907 млн человек, а годовой прирост за 1969 г. составил 4,2%. Считая темп прироста населения неизменным и в будущем, определить, когда население города увеличится в 4 раза.

Решение. Воспользуемся формулой (3), из которой имеем

$$\frac{A}{A_0}=e^{kt}.$$

Отсюда в силу условия задачи

$$4=e^{0{,}042t},$$

что после логарифмирования дает

$$2\ln 2=0{,}042t,$$

откуда

$$t=\frac{\ln 2}{0{,}021}\approx\frac{0{,}693}{0{,}021}=33.$$

Итак, население Минска увеличится в 4 раза в 2003 г.

ИСТОЩЕНИЕ РЕСУРСОВ

Задача. В 1970 г. для обеспечения пищей одного человека требовалась площадь 0,1 га и на земном шаре было 4000 млн га пахотной земли. Предположим, что с 1970 г. эти условия по настоящее время не изменились и не изменятся в будущем, а так-

же не появились и не появятся новые источники пищи. Тогда население Земли должно быть ограничено количеством 40 000 млн человек. Когда будет достигнут этот предел насыщения, если в 1970 г. оно составляло 3600 млн человек и непрерывно растет со скоростью 1,7% в год?

Решение. Закон роста населения согласно формуле (3)

$$A = A_0 e^{kt}.$$

Так как в 1970 г. ($t=0$) население Земли составляло $3{,}6 \cdot 10^9$ человек, то $A_0 = 3{,}6 \cdot 10^9$. Далее по условию задачи $k = 1{,}7\%$ или $k = 0{,}017$. Поэтому

$$A = 3{,}6 \cdot 10^9 e^{0{,}017t}.$$

Ищем теперь такое t, чтобы

$$40 \cdot 10^9 = 3{,}6 \cdot 10^9 e^{0{,}017t},$$

откуда $e^{0{,}017t} = \frac{10}{0{,}9}$ или $e^{0{,}017t} = \left(\frac{10}{3}\right)^2$.

Логарифмируя последнее равенство, имеем

$$0{,}017t = 2 \ln \frac{10}{3} \approx 2{,}408,$$

откуда $t = 142$.

Итак, в 2112 г. мир достиг бы предела насыщения, если бы сохранился темп роста населения и не появилось новых источников пищи.

ТЕКУЧЕСТЬ РАБОЧЕЙ СИЛЫ

Задача. Пусть в начальный момент $t=0$ число рабочих на заводе равно A_0. На основе изучения данных статистики установлено, что скорость уменьшения числа рабочих со временем t прямо пропорциональна их числу. Известно также, что численность рабочих на заводе за год уменьшилась в 2 раза. Найти зависимость числа рабочих A от времени. Через сколько лет число рабочих уменьшится в 8 раз?

Решение. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$A' = -kA$$

($k > 0$ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом текучести), т. е. уравнение (2) с начальным условием $A = A_0$ при $t = 0$. Поэтому (см. формулу (4))

$$A = A_0 e^{-kt}.$$

Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия: $A = \frac{A_0}{2}$ при $t = 1$. Имеем

$$\frac{A_0}{2}=A_0e^{-k} \text{ или } e^k=2.$$

Поэтому искомая функция

$$A=A_0\,2^{-t},$$

откуда, полагая $A=\frac{A_0}{8}$, имеем

$$\frac{A_0}{8}=A_0 2^{-t} \text{ или } 2^{-3}=2^{-t}$$

и, значит, $t=3$, т. е. через три года число рабочих на заводе уменьшится в 8 раз.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕКЛАМЫ

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция B, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знает лишь x покупателей. Предположим далее, что для ускорения сбыта продукции B были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом. С большой степенью достоверности можно считать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции B прямо пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нем еще не знающих.

Если условиться, что время отсчитывается после рекламных объявлений, когда о товаре узнало $\frac{N}{\gamma}$ человек, то приходим к дифференциальному уравнению

$$x'=kx\,(N-x) \qquad (9)$$

($k>0$ — коэффициент пропорциональности) с начальным условием $x=\frac{N}{\gamma}$ при $t=0$, т. е. уравнению вида (5). Значит, согласно формуле (7) имеем

$$x=\frac{\frac{N}{\gamma}\cdot N}{\frac{N}{\gamma}+\left(N-\frac{N}{\gamma}\right)e^{-kNt}}$$

или

$$x=\frac{N}{1+(\gamma-1)\,e^{-kNt}}\,. \tag{10}$$

Схематический вид графика функции (10) тот же, что на рисунке 25.

Наконец, отметим, что к уравнению (9) сводится, в частности, также и задача о распространении технологических новшеств.

ЛИТЕРАТУРА

Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях.— М.: Наука, 1987.

Баврин И. И. Высшая математика.— М.: Просвещение, 1993.

Бейли Н. Математика в биологии и медицине: Пер. с англ.— М.: Мир, 1970.

Виленкин Н. Я. Функция в природе и технике.— М.: Просвещение, 1985.

Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов: Пер. с англ.— М.: Высшая школа, 1983.

Никольский С. М. Элементы математического анализа.— М.: Наука, 1989.

Пономарев К. К. Составление дифференциальных уравнений.— Минск: Вышэйшая школа, 1974.

Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. Рассказы о прикладной математике.— М.: Наука, 1979.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

БАВРИН ИВАН ИВАНОВИЧ

НАЧАЛА АНАЛИЗА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ И ЭКОНОМИКЕ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художники *А. С. Побезинский, М. Н. Новожилова, В. В. Костин, О. М. Шмелев*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Технические редакторы *С. С. Якушкина, Р. С. Еникеева*
Корректоры *Н. В. Бурдина, И. В. Чернова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.96. Подписано к печати с диапозитивов 06.03.2000. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5. Усл. кр.-отт. 5,62. Уч.-изд. л. 4,19. Тираж 5000 экз. Заказ № 2426.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

Каждого изучающего математику интересует, как применить полученные знания.

Ответ на волнующий многих вопрос вы найдете, прочитав эту книгу.

Автор на конкретных примерах раскрывает секреты практического применения начал анализа и математических моделей в физике, химии, геометрии, биологии и экономике.

ISBN 5-09-009905-7